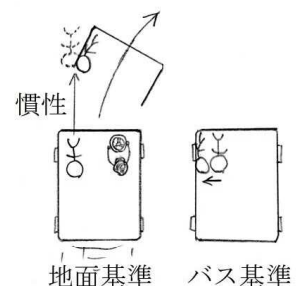


1. 星や太陽、月の日周運動がまさに円運動であること、天体が円形であること、そして、円が図形として完全に整っているという印象から、天の世界(あるいは神の世界)の基本的デザインにふさわしいと考えたのではないかな…
2. そもそも、地球が動いているという感じがしない!…馬車でも船でも動けばすぐに分かる。地球が公転しているならかなりの高速になるが、もしそうなら、なぜ飛び上がった人が置き去りにされないのか!
3. 等速直線運動をし続ける天体は、無限に広がる宇宙(空間)というイメージにつながるが、当時「無限に広がる宇宙」はきわめて異端な発想であった。このことも「等速直線運動」を考えなかったことに関係しているだろう(ちなみに、G.ブルーノ(16C)は宇宙は無限に広がっていて太陽は夜空の星々と同じ存在だ、という主張を押し通し、異端審問により火刑に処されたという)。
4. 「くだけた」という理由: 静止または等速直線運動(の状態)を「保とうとする」という部分がくだけている。保とうと“努力”している、“頑張っている”というニュアンスがあり、静止・等速直線運動を維持させている主体(原因)の存在を暗示している。なお、「慣性の法則がはたらいて動き続ける…」もよく使われる表現だが、これも同様の意味でくだけた表現と言えるだろう。ただし「くだけた表現」も、そうと分かって使う分には問題ない。
5. p.4の「動くものは動かすものによって動かされる(アリストテレス)」が如何に“自然”かを感じる体験です(笑)!
6. バスが発進するとき、乗客は静止の状態を保とうとしているが、バスの床が摩擦力によって乗客の足を引っ張っていくことになり乗客は倒れる。急停止する場合は、乗客が同じ速度を保とうとしているのに、バスの床の速度が遅くなり、乗客は「つんのめる」ことになる。
7. 車が何かに衝突して急激に止まった場合、シートベルトをしていないと、搭乗者は前と同じ速度を保とう(慣性)とし、フロントガラスを破って車外に投げ出されるという事故も発生する。
8. 乗客は静止の状態を保とう(慣性)としているが、飛行機は動きだし、急激に速度を増していく。座席が乗客を押すことになるのだが、乗客は機体を基準にして状況を判断し(感じ)、自分が座席に押しつけられていると感じる。
9. バスが右にカーブした場合、乗客は等速直線運動を続けようとする(慣性)が、バスが“勝手に(!)”左側から乗客に近づいてくる! 乗客は、バスの中の出来事はバスを基準にして見るのが普通だから、バスの中で自分が左向きに(カーブの外向き)に動き出したと判断する(感じる)。これを、遠心力が働いて身体が動き出したと解釈している(感じている)のである。



異常なもの(バス)を基準にすると正常なもの(慣性)が異常(身体が動く)に見える!とも言える。

10. 単に相手に向かって(真横に)投げればよい。投げる前にボールは選手と同じ速さで進んでいて、手から離れた後もボールはその速さを保つからである。(注)飛んでいる間の空気抵抗を考慮すると、少し前方に投げる必要はあるかも…試してみてください!
11. スケボーに乗っている人の立場で真上に飛び上がれば、飛び上がっている間も人とスケボーは水平方向に同じ速さで移動するから、再びスケボーの上に乗る。前方に飛ぶと、ボードを後ろに蹴ることになり、ボードのスピードが落ちるし、人はほんのちょっとスピードアップする。
12. 地上に対して等速直線運動をしている電車の中に立っている人は、電車と同様に地上に対して等速直線運動をしている(この時、この人には水平方向に力は働いてない)。飛び上がっている間、そ

の人には水平方向に何も力は働かないからこそ、飛び上がっている間、水平方向の移動速度は変化しない。したがって、この人と電車は、水平方向に関して位置はずれない。

1 3. 短い時間なら人工衛星も等速直線運動をしていると見なしてよい。飛行士も宇宙船と同じ速度をもち、それを保とうとするから、船外に出ても飛行士は宇宙船と同じ動きをする…つまり、宇宙船から離れない。(飛行士も“人工衛星”になっていると考えればよいのだが)

1 4. ピンポン球は水槽の動きを追うように同じ向きに動く。これは[実技]にすべきだった！実際に見ると、理屈は分かっているとしても十分に“不思議”な感じがする。いま、水槽を右向きに動かしたとしよう。水は止まっていようとするので、水槽の左側の水面が上昇する(水面が斜め(右下がり)になる)。すると、ピンポン球の左側に加わる水圧が右側より高くなり、ピンポン球は右側に動く。(補足)ピンポン球の密度が水より小なので、ピンポン球の慣性が水より小であることも重要。

1 5. 1 kgの物体に地表付近で働く重力の大きさ。また、それに等しい大きさの力。

1 キロ力(kgw) $\div$ 10 N

1 6. $1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \div 1.0 \times 10^5 (0.1 \text{ キロ力})/\text{m}^2 = 1.0 \times 10^4 \text{ キロ力/m}^2 = 1.0 \times 10^4 \text{ キロ力}/(100\text{cm})^2$
 $= 1.0 \times 10^4 \times 10^{-4} \text{ キロ力/cm}^2 = \underline{1.0 \text{ キロ力/cm}^2}$ 小指の爪ほどの所に水 1 リットル入りのペットボトル(約 1 kg)をのせたのと同程度！

1 7. (1) $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$, この水の質量は $1.0 \text{ g/cm}^3 \times 10^6 \text{ cm}^3 = 10^6 \text{ g} = 10^3 \text{ kg}$ (1 トン!), したがって、これに働く重力は 10^3 キロ力 (1 トン力)

(2) 底面積 1 m^2 , 高さ 10 m の「水の柱」を考える。求める水圧は、この「水の柱」の重みという感じ。この「水の柱」の質量は $10^3 \text{ kg} \times 10 = 10^4 \text{ kg}$, したがって、求める圧力は

$$10^4 \text{ キロ力/m}^2 = 10^4 \text{ キロ力}/(100\text{cm})^2 = 10^4 \times 10^{-4} \text{ キロ力/cm}^2 = \underline{1.0 \text{ キロ力/cm}^2}.$$

$10^4 \text{ キロ力/m}^2 \div 10^4 (10\text{N})/\text{m}^2 = 10^5 \text{ N/m}^2 \div \underline{1 \text{ atm}}$ (1 気圧、問題 1 6 参照) 実際は大気圧が加わっているから水圧は 2 気圧。

1 8. 「矢に沿って歩いたら元に戻った」

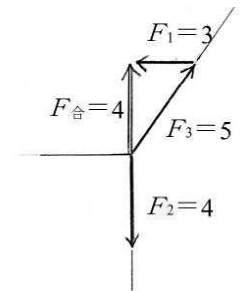
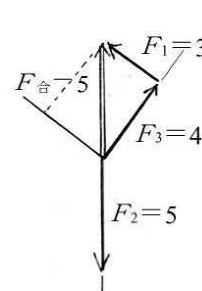
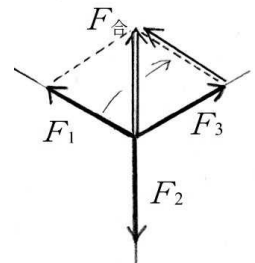
1 9. この問題は[実技]にすべきだった！

直感: 何となく… 60° じゃない? 「おもりがぶら下がっている」というのは考えないで(重力の向きは意識せず)、単に「結び目に同じ大きさの力が 3 方向に働き、つり合って静止している」と見るなら、隣り合った糸のなす角はみな同じはず(違いが生じる理由がない)。だったらその角度は $360^\circ \div 3 = 120^\circ$ 。で、図14.14の状況は左右対称だから、求める角度は 60° 。

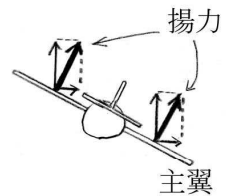
力の合成・つり合い: 右図のように、糸が引く力 $F_1 = 50 \text{ g力(gw)}$ と $F_3 = 50 \text{ g力(gw)}$ の合力を $F_{\text{合}}$ とする。 $F_{\text{合}}$ は $F_2 = 50 \text{ g力(gw)}$ とつり合っているはずだから、 $F_{\text{合}} = 50 \text{ g力(gw)}$ である。右図のように、 F_1 の矢を F_3 の矢の先端へ平行移動させれば、 F_1 、 F_3 、 $F_{\text{合}}$ の力の矢がつくる三角形は正三角形になることが分かる。したがって、求める角度は 60° である。

2 0. この問題も[実技]にすべきだった！答えは右図。問題

1 9 解答の図と同様に扱って、 F_2 は鉛直下向き。そして、力 F_1 、 F_3 の合力 $F_{\text{合}}$ に注目！ $F_{\text{合}}$ と F_2 のつり合いを考えると、 $F_{\text{合}}$ は鉛直上向きで、 $F_{\text{合}} = F_2$ のはず。したがって F_1 、 $F_{\text{合}}$ 、 F_3 の矢が作る三角形は、辺の比が 3 : 5 : 4 および 3 : 4 : 5 の直角三角形になっている。



21. 機体の進行方向を曲げるのに、主翼に働く揚力を利用している。揚力は主翼に垂直に働くが、機体を傾けることによって、揚力の向きが鉛直上向きから傾き、水平方向の分力(成分)が現れる。この分力を使って機体の進行方向を変化させている。(補足)このとき同時に機体を鉛直方向に支える力は小さくなるから、それに応じた操作が必要となる。



22. 同時に働いている。作用と反作用のペアの作用点はそれぞれ別の場所にあるから、それらが同じ物体(一体となった物体)にあればつり合う(問題24参照)が、別の物体にあれば、つり合う力にはならない(問題23、25参照)。

23. Bさんが受ける力を作用とよぶと、反作用はAさんの手が受ける力である。この力のペアは互いに向きが逆だが同じ大きさの力である。Aさん、Bさんの質量は同じで、同じ大きさの力が同じ時間だけ働くのだから、「物理的(力学的)」には左右対称の状況であって、AさんとBさんは同じ速さで左右に別れていく。「パンチを受けたBさんだけが吹っ飛ばされる」のではない!

24. この場合、作用と反作用のペアが1つの物体(身体、頭と手)に働いている。したがって、両者は打ち消し合って身体を動かすような力にはならず、体重計は反応しない。

25. 作用と反作用のペアの作用点は、異なる場所にある。この場合、作用反作用のペアの一方は足に働き、他方は地面に働いている。足に働く力が身体を動かす元になるが、地面に働く力はいわば「地球を動かして」いることになる!ただし、地球の質量は身体の質量に比べて非常に大であり、実質的には地球は動かない(p.19 ②(質量と慣性)も参照のこと)。

26. たとえば右図のように、ローラースケートをはき、右手に強力な磁石、左手に弱い磁石を持ちN極どうしを近づけ、弱い磁石を前方、強力な磁石を後方に構える。もし、弱い磁石のN極に働く力のほうが、強力な磁石のN極に働く力より強ければ、身体は前方に動き出す...外から力が働かないのに!おお、慣性の法則の否定!でも、実現すればとっても便利(笑)



27. 「北緯」「東経」、さらにマンションなどの場合のために「高さ」の3つの数値。日常生活での実用面では不便かもしれないけれど、確かに単純ではある。もっとも、北緯・東経の数値はかなり細かくなるので、その点でも人間向きではなくAI向きかな(笑)

28. これ、意外といいですよ!加速度の話題に出会ったら、是非やってください。

29. 加速度 $a = \frac{40 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{0.10 \text{ s}} = \frac{40 \text{ m/s}}{0.10 \text{ s}} = 400 \text{ m/s}^2$ 重力加速度の約40倍!大きいですネ。

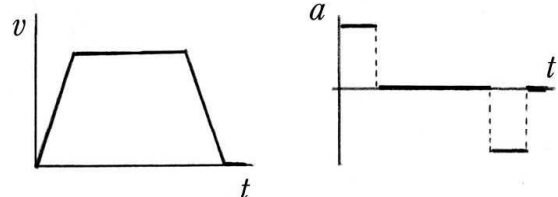
というか、0.10sという短時間で40 m/s=144 km/hのスピードになるっていうのがスゴイですネ。もちろん、手の動きがそうになっているということです。

30. 1秒間あたりの速度の変化量が加速度(m/s²)だから

求める速さ = $9.8 \text{ m/s}^2 \times 3 \text{ s} = 29.4 \div 29 \text{ m/s}$. $29.4 \times 3.6 = 106 \div 110 \text{ km/h}$...かなり速い!

31. 多分ご想像通り、チーターは代表格のようです。ただし、ごく短時間ならメダカのようなごく小さな動物の加速度はかなり大きいようです(p.19 ②(質量と慣性)参照)。

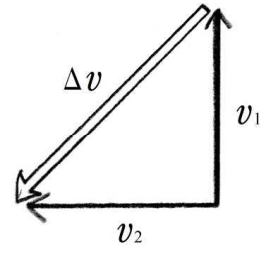
32. 右図の通り。問題文にもある通り「 $x-t$ グラフに引いた接線の傾きが、その時刻での瞬間の速度に等しい」ので、速度ははじめ徐々に速くなり、その後しばらく一定の速度が続くが、次に徐々に遅くなって最後に静止する。速度 v は位置(座標) x の変化率とも言え



るが、加速度は「速度の変化率」だから「 $v-t$ グラフに引いた接線の傾きが、その時刻での瞬間の加速度に等しい」のである。

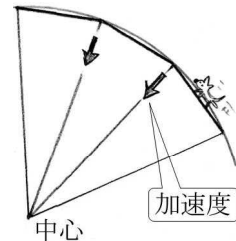
3 3. 進行方向(速度の向き)を正の向き(+の向き)と設定した場合。是非、図6.4～図6.8でチェックしてみてください。とてもいい学習になりますヨ！

3 4. 右図のように速度追跡図を描く。はじめの速度 v_1 の矢が北向き、あとの速度 v_2 の矢が西向きで「 v_1 の矢の先端から v_2 の矢の先端へと結んだ新たな矢は、速度の変化 Δv の矢」であるから、速度の変化は南西の向き。速度の変化 Δv の向きをその時の加速度の向きと定義しているから、加速度も南西の向き。



(補足)「加速度の向きは、つねに働く力の向きに一致する」を確かめてみよう。図6.10で角を曲がる時、犬には南西の向きの力が働いているはずである。作用反作用の法則から、このとき犬は北東の向きに地面を蹴っているはず。そう、皆さん！皆さんが角を曲がる時、地面や床をどのように足で押すか、あるいはどの向きに身体を傾けるかを実際に確かめてみてください！きっと納得がいきますヨ。

推論：図6.10の結果を一般化すると、等速で角を曲がる時「角の角度を2等分する角度の向き(図6.10の場合は 45°)」に加速度が生じると言える。そこで右図のように、円運動の軌道を非常に細かい正多角形と見なすなら、等速での円運動の加速度の向きは、円の中心方向を向いていることになる。



3 5. 運動方程式「 $a \propto F/m$ 」において、力 F が同じ(同じエンジン)だから $a \propto 1/m$

つまりこの場合、加速度は質量に反比例する。子どもの質量は力士の $1/10$ だから、子どもの加速度 $a_{\text{子ども}}$ は力士の加速度 $a_{\text{力士}}$ の10倍になる。 $a_{\text{子ども}} = 10 a_{\text{力士}}$

3 6. 定義：p.20(7.4) 目的：運動方程式p.18(7.1)式の比例定数を $k=1$ にすること。

3 7. 加速度は $a = \frac{40 \text{ m/s}}{0.10 \text{ s}} = 400 \text{ m/s}^2$ 、力 $F = ma = 0.145 \text{ kg} \times 400 \text{ m/s}^2 = \underline{58 \text{ N}} = 58 \times (1/9.8) \text{ キロ力(kgw)}$

$\approx \underline{6 \text{ キロ力(kgw)}}$ 5 kgのお米だって、手の平にのせて腕を水平にするのは大変でしょう。0.10 sという短時間とはいえ、投手は 6 キロ力(kgw)の力をボールに加えている。大きな負担でしょうね！

3 8. エンジンの推力 $F = ma = 350 \times 10^3 \text{ kg} \times 2.5 \text{ m/s}^2 = \underline{8.75 \times 10^5 \text{ N}} = 8.75 \times 10^5 \times (1/9.8) \text{ キロ力(kgw)}$
 $= 8.9 \times 10^4 \text{ キロ力(kgw)} = \underline{89 \text{ トン力}}$ 機体を支える力は 350 トン力だが、それよりずっと小さい。エンジンの推力は機体を加速するのに使っている力で、機体を支えている力は、主翼が空気から受けている力(揚力という)なのです。問題2 1 参照。

3 9. 摩擦力は、運動とは逆の向きに働いている(運動を邪魔する力！)。摩擦力の大きさ(絶対値)を $f [\text{N}]$ とすると、荷物の運動方程式「 $ma = F$ 」は(運動の向きを正の向きとして)

$$5.0 \text{ kg} \times 3.0 \text{ m/s}^2 = 20 \text{ N} + (-f) \quad \therefore f = \underline{5.0 \text{ N}}$$

4 0. 重力 $W = mg = 50 \times 9.8 = 490 \text{ N}$ (注) 重力(万有引力)は物体の運動状態には関係しないことが分かっている、物体が落下している時と静止している時とで、働く重力の大きさは変わらない。

4 1. 月では $W_{\text{月面}} = mg_{\text{月面}} = 50 \text{ kg} \times (0.17 \times 9.8 \text{ m/s}^2) = 83.3 \text{ N} = 83.3 / 9.8 \text{ キロ力(kgw)} = \underline{8.5 \text{ キロ力(kgw)}}$

なお、重力の大きさをキロ力(kgw)の単位で表したい場合は、質量に kg、加速度に G の単位を用るとよい ($1 \text{ G} = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、p.23<補足12>参照) : $W_{\text{月面}} = mg_{\text{月面}} = 50 \text{ kg} \times 0.17 \text{ G} = 8.5 \text{ キロ力(kgw)}$

太陽では... $W = mg_{\text{太陽}} = 50 \text{ kg} \times 28 \text{ G} = 1400 \text{ キロ力(kgw)}$ ← 50 kgの人で、なんと1.4 トン力！

4 2. 力 $F = m a = 1.0 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ N}$

地表付近で物体を落下させると、その加速度は約 9.8 m/s^2 だから、物体の質量が 1 kg なら、働く重力は 9.8 N 。一方、この力は 1 キロカ(kgw) の定義に一致しているから $1 \text{ キロカ(kgw)} = 9.8 \text{ N}$

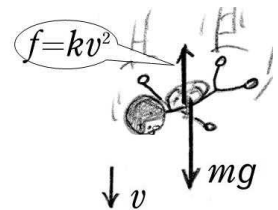
4 3. 間違え。台車とおもりは、それぞれの加速度の向きは違うが大きさはつねに同じだから、両者を一体として考えよう(p.21例題 6 (1)参照)。102 gのおもりに1.0 Nの重力が働くのは確かだが、この力によって「おもり+台車」を動かしている(ここでは糸の質量は無視している)。つまり質量 $m = 1.0 \text{ kg} + 0.102 \text{ kg} = 1.102 \text{ kg}$ の物体を加速している。したがって加速度 a は

$$a = \frac{1.0 \text{ N}}{1.102 \text{ kg}} = 0.907 \div 0.91 \text{ m/s}^2$$

(訂正) (4) は、問題 4 3 とは別の、例題 7 (2) 関連の独立した問題です。是非やってみてください。

4 4. 許容限界の荷物の質量を m_0 とすると、それに働く重力は $m_0 g = 3.0 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 29.4 \text{ N}$ つまり「29.4 Nの力が紙袋の底に加わると破れる」と言い換えることができる。例題 7 と同様に質量 $m[\text{kg}]$ の荷物が袋から受ける力を $R[\text{N}]$ とすると、荷物の運動方程式は $ma = R - mg$ 。袋の底が荷物から受ける力を $R'[\text{N}]$ とし、 $R' = R = mg + ma = 2 \times 9.8 + 2.0 a = 29.4 \text{ N}$ とおいて、 $a = 4.9 \text{ m/s}^2$ 4 5. 大きな雨滴やスカイダイバーの場合、問題文に記したように $f = k v^2$ である。質量 m のスカイダイバーの運動方程式は、速度 v のときの加速度を a 、鉛直下方を正の向きとして $ma = mg - kv^2$ である。したがって

$$a = g - \frac{kv^2}{m}$$



v がある値に達するまでは $a > 0$ であり速度 v が増すが、 v の増加に伴って、 a の大きさは減少していく(速度の増し方が鈍くなる)。 a が減少して $a = 0$ に達すると、速度 v は変化しなくなり等速で落下していく。これが終端速度である。(補足) 数学的には「 $a = 0$ に達する」ではなく「 $a = 0$ に限りなく近づく」という表現になる。ただし、現実的には $a = 0$ になってしまう。

4 6. 「この物体の質量が1 kg !」という物体、即ち「キログラム元気」でなく「キログラム原器」がパリ郊外の国際度量衡局に保管されていて、日本にもそのレプリカがある。キログラム原器は白金・イリジウムその他の合金でできている。その質量が、定義として $1.0000000000000000 \dots \text{ kg}$ 。

ただし、もっと洗練された定義が現在、さかんに研究・議論されている。

4 7. 普段、「質量の大小」と「重い、軽い」は同じ意味と見なされることが多い。そう見なしなくても、日常生活ではほとんど支障はないのが実情である。しかしそれは質量の正確なイメージではない。「質量とはなにか」について、いろいろ議論することはとても有意義だが、あまり本質論になってしまつてはつかみ所がなくなる。まずは論点の一つとして、質量の違いが「どのような現象として現れるか」に注目するのが良いだろう。p.19 : ②(質量と慣性)の記述が役に立つと思う。

4 8. ボールが手から離れたところを原点とし、鉛直下方を正の向きとして y 軸を設定する。

(1) 「 $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ 」を使い、 x を y に、 $v_0 = 0 \text{ m/s}$ 、 $a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とすると、次式が成り立つ。

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times t^2 = 14 \text{ m} \therefore t = \sqrt{2.86} = 1.69 \div 1.7 \text{ s}$$

(3) 「 $v = v_0 + at$ 」を使い、 $v_0 = 0 \text{ m/s}$ 、 $a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とし、(1)で求めた $t = 1.69 \text{ s}$ を用いて

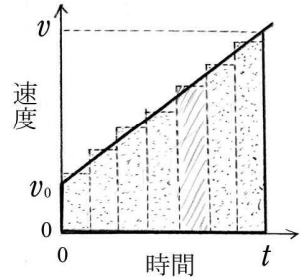
$$v = gt = 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1.69 \text{ s} = 16.6 \div 17 \text{ m/s} \text{ (約60km/h)}$$

49. 落下し始めの位置を原点とし、鉛直下向きを正の向きとして y 軸を設定する。

「 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ 」を使ってみよう。 $v_0 = 0 \text{ m/s}$ 、 $y = +500 \text{ m}$ 、 $a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$ として

$v^2 - 0^2 = 2gy = 2 \times 9.8 \times 500 = 9.8 \times 10^3 \quad \therefore v = \sqrt{9.8 \times 10^3} = 99.0 \text{ m/s}$ 約 100 m/s ! 空気抵抗を無視しているので、もの凄く大きな値。これでは、雨の日はヘルメットが必要…。実際は $10 \text{ m/s} \sim 20 \text{ m/s}$ 程度。(注) 500 m 落下する時間を求め、その間に速度がどうなるかを計算してもよい。

50. p.29図8.9のように等加速度運動を“階段状加速度運動”に置き換えると、各ステップは等速運動だから、右図の斜線部分の面積「速度×所要時間(ステップ幅)」はその間の移動距離に等しい。したがって、右図の点々部分(斜線部分も含める)の面積は時間 $0 \sim t$ での移動距離に等しい。さてそこで、本来の $v-t$ グラフに重なるようにしながら、階段をう～んとう～んと細かくしていったなら…「もう、目で見分には $v-t$ グラフといっしょになっちゃってる!」というふうになるでしょう。でも「階段」なのです! だっ



たら、 $v-t$ グラフ(直線)を一つの辺とする右図の「台形」の面積が移動距離に等しいことになる。最後の仕上げとしては、「どうやって検査しても $v-t$ グラフとの違いが絶対に分からない」という極限的細かさの“階段”にすればよい。これは数学で学習する「微積分」の基本的考え方の例です。

(補足) 微積分を既に学習している人へ：問題86の解答(補足)(2)の方法を使ってみてください。

51. ボールが手から離れた点を原点とし、鉛直上方を正の向きとする。「 $v = v_0 + at$ 」を使い、 $a \doteq -g \doteq -10 \text{ m/s}^2$ とする。 $t = 1.5 \text{ s}$ で最高点に達し、そのときの速度が $v = 0 \text{ m/s}$ で、 v_0 が求める速度である。

$$v = v_0 + (-g)t = v_0 + (-10) \times 1.5 = 0 \text{ が成り立ち} \quad \therefore v_0 = 15 \text{ m/s}$$

(注)「最高点」を文字通りに受け取るのではなく、このように「速度が 0 になる点」と言い換えると計算が単純になる。

52. 最高点においてもボールには重力が働いているから、運動方程式よりボールの加速度は下向きに重力加速度 g である。

向きについて、p.16②(加速度の向き)速度追跡図からの考察：最高点の直前の速度 v_1 は上向き $\uparrow$ 、直後の速度 v_2 の向きは下向き $\downarrow$ だから、速度の変化 Δv は下向き $\downarrow$ で加速度 a も下向き(直前と直後の時間間隔を限りなく 0 に近づけたとしても同じ結論になる)。

53. (a) 瞬間の速さ そうなんです、一瞬でも 40 km/h を超えればスピード違反ですヨッ!

(b) 平均の速さ 100 m 進むのに要する時間を競っているのであって、瞬間的な最高スピードではないです。…瞬間の速さを競う競技があってもおかしくはないですね! 現在では技術的にいって十分に測定可能でしょう。

54. 平均の速さ：最高点からの落下時間も 1.5 s だから、最高点の高さを $h \text{ [m]}$ とすると

$$h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \times 10 \text{ m/s}^2 \times (1.5)^2 = 11.25 \text{ m}$$

したがって、往復の移動距離を $L \text{ [m]}$ とすると $L = 2h = 22.5 \text{ m}$ 、所要時間は $t = 1.5 \text{ s} \times 2 = 3.0 \text{ s}$

$$\text{平均の速さは} \quad \bar{v} = \frac{\text{移動距離}}{\text{所要時間}} = \frac{L}{t} = \frac{22.5}{3.0} = 7.5 \text{ m/s}$$

平均の速度：ボールは往復して元に戻ってきたから、その間の変位を Δy とすると $\Delta y = 0 \text{ m}$

$$\text{したがって、平均の速度は} \quad \bar{v} = \frac{\Delta y}{t} = \frac{0 \text{ m}}{3.0 \text{ s}} = 0 \text{ m/s}$$

- 5 5. 往復での移動距離は $L = 12 \text{ km} \times 2 = 24 \text{ km}$ 。所要時間は、往きが $12 \text{ km} \div 4.0 \text{ km/h} = 3.0 \text{ 時間}$ 、帰りが $12 \text{ km} \div 3.0 \text{ km/h} = 4.0 \text{ 時間}$ 。したがって平均の速さ $\bar{v}$ は

$$\bar{v} = L \div t = 24 \text{ km} \div (3.0 + 4.0) \text{ 時間} = 24 \div 7.0 = 3.43 \div 3.4 \text{ km/h}$$

Q町で 1 時間休んだなら $\bar{v} = L \div t = 24 \text{ km} \div (3.0 + 1.0 + 4.0) \text{ 時間} = 3.0 \text{ km/h}$

(補足) 往きの速さと帰りの速さを足して2で割った

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(4.0 \text{ km/h} + 3.0 \text{ km/h}) = 3.5 \text{ km/h}$$

も、ある種の平均であることには相違ない。しかし、物理での「平均の速さ $\bar{v}$ 」は「移動距離 $\div$ 所要時間」で定義されているので、 $\bar{u}$ とは違った値になる。この点をもう少し詳しく見てみよう。

平均の速さの計算式を少し書き直すと

$$\bar{v} = \frac{4.0 \text{ km/h} \times 3.0 \text{ 時間} + 3.0 \text{ km/h} \times 4.0 \text{ 時間}}{3.0 \text{ 時間} + 4.0 \text{ 時間}} = \frac{24 \text{ km}}{7.0 \text{ 時間}} = 3.4 \text{ km/h}$$

つまり、平均の速さとは「どれだけの時間その速さの状態だったか」という時間の「重み」を速さに掛けて求めた平均で、一般的には**時間平均**とよばれる種類の平均である。

一方 $\bar{u}$ については、次式のような解釈をするなら、これは一般に**位相平均**とよばれる種類の平均に相当すると言えるだろう。上記の時間平均との違いと類似点に注目すると面白い。

$$\bar{u} = \frac{4.0 \text{ km/h} \times 12 \text{ km} + 3.0 \text{ km/h} \times 12 \text{ km}}{12 \text{ km} + 12 \text{ km}} = \frac{84}{24} = 3.5 \text{ km/h}$$

- 5 6. (1) 右図

(2) 水に対する船の相対速度を v' [m/s] とすると、船は川下に向かうから $v' = +4.0 \text{ m/s}$ 岸に対する水の水の速度(川の流れる速度)を v_A [m/s] とすると、問題文より $v_A = +1.0 \text{ m/s}$ 。したがって、岸に対する船の速度を v [m/s] とすると、速度の合成より

$$v = v_A + v' = (+1.0 \text{ m/s}) + (+4.0 \text{ m/s}) = +5.0 \text{ m/s}$$

- (3) $v_A = +1.0 \text{ m/s}$ 、船は川上に向かうから $v' = -4.0 \text{ m/s}$ であり、速度の合成より

$$v = v_A + v' = (+1.0 \text{ m/s}) + (-4.0 \text{ m/s}) = -3.0 \text{ m/s}$$

- (4) 600 m の距離を、(2)と(3)それぞれで求めた速度 v で移動するから、求める時間を t [s] とすると

$$t = \frac{600 \text{ m}}{5.0 \text{ m/s}} + \frac{600 \text{ m}}{3.0 \text{ m/s}} = 120 \text{ s} + 200 \text{ s} = 320 \text{ s}$$

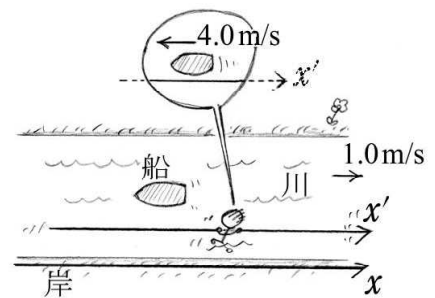
(注) この問題は比較的単純なので、「正しいお作法」で扱っても「疲れるだけ」かもしれない。しかし、「いざとなったら“正しいお作法”が使える」ようにしておくと、もっと複雑あるいは抽象的な状況を扱う場合には、きっと混乱を避けることができ頼りになると思う。

- 5 7. 「同じ」と考えてよい。理由：ボールの初速はどちらも地面に対して水平方向に v_0 で、手から離れた後は、どちらも重力だけが運動を変化させているから。

(補足) 初期条件が同じで、その後に働く力が同じだから、同じ運動をするということである。もちろん、空気抵抗を考えるなら「働く力が同じ」ではなくなるから同じ運動にはならない。

- 5 8. 初速 0 の落下は簡単にできるが、水平投げ出しは少し練習がいる。水平に「投げる」というより「押し出す」という感じのほうが、うまくいくかもしれない。

- 5 9. 使用する紙は普通のコピー用紙などでよい。2 重に巻いて直径 5, 6cm の円筒形を作り軽くテープでとめればよい。発泡スチロール球でカーブを投げる場合、ボールを指先で持って、指でボールに



回転を与えながら投げるとよいだろう。

60. 「ボールが斜め上に向かって進もうとするのは、慣性の法則のため。ボールに斜め上向きの初速を与えたから、その運動(速度)を保とうとしている。確かに、初速を与えるときにはボールに斜め上向きの力を加えたけれど、手から離れてからは、ボールに働く力は重力だけ」

同じようなことをp.41③(放物運動の別の見方)では、もっと計算にも使えるレベルで説明しているので参考にしてほしい。

61. どちらのボールも手首を使って投げようとせず、手首は固めて腕だけで動かして投げるとよい(図11.11の絵では手首を使ってますネ！すみません)。「投げる」というより「手放す」という感じ。

62. 左側：「慣性運動 $v_0 t$ 」 右側：「落下運動 $\frac{1}{2} g t^2$ 」

63. p.41：例題15を参照。図11.10を使って説明をすると：はじめ猿は点Pにいたとする。ボールの「初速を保つ運動(慣性運動)」の部分(矢ノ)が点Pに達した時刻を t とすると、そのときのボールの位置は点Pの真下 $\frac{1}{2} g t^2$ の点Qである。一方、ボールが投げ出されたと同時に、猿も点Pから初速 0 の落下を始めたのだから、時刻 t において猿は点Qを落下中である。ボールと猿は同じ時刻 t に同じ場所にあるのだから、両者は衝突する。

64. p.41③(放物運動の別の見方)を使うと、ボールの運動のイメージは

ボールの運動 = 慣性運動 + 落下運動

また題意より

観測者の運動 = 「初速を保つ運動：慣性運動」と同じ運動

ここでp.35(10.3)式を用いると

観測者に対するボールの相対的な運動 = ボールの運動 - 観測者の運動

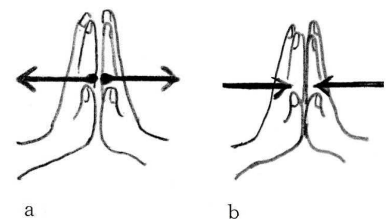
$$= (\text{慣性運動} + \text{落下運動}) - \text{慣性運動}$$

$$= \text{落下運動}$$

したがって、観測者が見るボールの運動は「単なる初速 0 の落下運動」である(上図)。

65. 左右の手の平を強く押しつけると、p.43図12.2で力 N が大きくなるのと同じで、最大摩擦力 $f_{\max}$ が大きくなって、手の平を上下にずらしにくくなる。それを実感してください！

この場合に、左右の手の平が押し合う力は右図 a のように表される。でも、もしかして、図 b のほうが分かりやすいかもしれない！ 図 b も間違えとは言えないのだが、力の矢を「作用点から描く」なら図 a が正しい。「図 a だと左右の手が離れていくように感じる」という意見もあるだろう。もちろん、図 a の 2 つの力だけが働くのなら左右の手が離れていくが、実際には左右の腕が



「左右の手の平が押し合うように」力を加えているのである。それで左右の手の平が“衝突”し、図 a のように互いに力を及ぼし合っている(押し合っている)のである。

66. (1) 重力と圧力抵抗がつり合っているとして

$$f = k_2 v^2 = mg \text{ より } k_2 (56 \text{ m/s})^2 = 50 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \text{ これから } k_2 = 0.16 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$$

- (2) 風から受ける力は、スカイダイバーが空気から受ける力と同じ性質の力である(p.45：圧力抵抗))

身体の大きさや形は (1) と “似たようなもの” として、 k_2 に (1) と同じ値を使うと

$$f = k_2 v^2 = 0.16 \times (20 \text{ m/s})^2 = 64 \text{ N} \quad (= 64 \div 9.8 \text{ キロ力(kgw)} \doteq 6.5 \text{ キロ力(kgw)})$$

67. (1) おもりに働く重力と、おもりに働くばねの弾性力が釣り合っているから、弾性力を F 、おもりの質量を m 、ばね定数を k 、重力加速度を g として、フックの法則 $F=kx$ より

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{0.10 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{5.0 \times 10^{-2} \text{ m}} = 19.6 \div 20 \text{ N/m}$$

- (2) ばね自体に働く重力は無視しているから、各ばねに働く力の釣り合いから、2つのばねには同じ大きさの力が加わることが分かる。2つのばねの伸びが加わり、全体の伸びは、ばねが 1つの場合の 2倍になる。したがって $5.0 \text{ cm} + 5.0 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$

2つのばね全体のばね定数を k' とすると、(1)の解答で用いた式を使って $k' = \frac{F}{2 \times x} = \frac{1}{2} k = 10 \text{ N/m}$

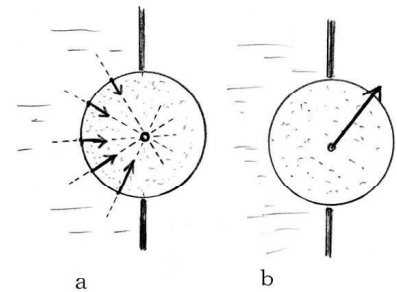
68. 重いほうに振れる。おもりには水から浮力が働くが、その反作用が水に働いていて、その向きは下向きである。したがって、その力の分だけ目方が重いほうに針が振れる。「おもりの質量 1 kg 」は関係しない。浮力の大きさ分だけ針が振れるので、浮力を測定していることになる。

[別解] おもりを入れると、おもりの体積の分だけ水面が上昇するので、水槽の底が受ける圧力は増加し、その分、目方が重いほうに針が振れる。水槽の底が受ける力の増加分はおもりが排除した水の重量に等しく、それはおもりに働く浮力に等しい。

69. 浮く。浮力は瓶の体積で決まり、“中身”には関係ない(p.47(12.8)式参照)。中に空気がないのなら、それだけ軽くなるのだから、瓶はむしろよく浮く(瓶の変形は無視している)。

(注)「え～、空気が入ってないのに浮くの？？」・・・そうですね、その気持ちもよく理解できます。浮き輪に空気を入れれば浮く。空気を抜けば沈む。「じゃあ、浮き輪が浮くのな誰のお陰？」と問えば、答えは「くーき！」ということになる。でも、それは、空気が浮き輪の体積を大きくしているからで、空気自体が浮き輪を持ち上げているのではないのです。

70. 圧力は面に垂直に働くので、車の左側面が水から受ける圧力は、どの場所であっても車の回転軸の向きを向いている(圧力の作用線が回転軸を通る：右図 a)。そのような力は車を回転させる働きをもたない。したがって、議論の誤りは、主として図12.23の浮力の作用点にある。実際には、車の左側が受ける浮力は(圧力の合力)、右図 b のようになっている。



71. プールの水全体が静止しているのだから、領域Aの水A(質量 m_0)も静止していて、水Aに働く重力 m_0g と浮力 F が釣り合っているはずである。したがって、水の密度を ρ 、領域Aの体積を V 、重力加速度を g とすると

$$\text{領域Aに働く浮力 } F = m_0g = \rho V g = \rho g V \text{ [N]}$$

浮力は圧力の差なので、水Aと同じ形・大きさの物体が水から受ける浮力も上記の力 F に等しい(浮力は領域Aの「中身」には無関係)。

72. 支点Oからの距離の比を例えば $OB : OA = 1 : 4$ とすると、テコの原理から $F_B = 4 F_A$ 、一方、A端を h [m]下げた時のB端の移動距離は $h/4$ 、したがって力 F_B がする仕事は

$$F_B \times (h/4) = (4 \times F_A) \times (h/4) = F_A \times h$$

であり、力 F_A がした仕事に等しい。「Aで与えたエネルギーが、そのままBから出てきている」とイメージすることができる。もちろん、これは摩擦を無視した話で、摩擦があればエネルギーの一部は摩擦熱となって散逸し、Bから出てくるエネルギーはその分、減少する。その場合もBの移動距離

は変わらないが、 F_B が小さくなっている。・・・というか、摩擦力の分、 F_A を大きくしなくてはならないと言うべきだろう(発生する熱の分だけAでの仕事(エネルギーの入力)を多くする)。

7 3. 力×変位(力で物体を動かす) の形を取らずにエネルギーが移動する例であり、風呂で身体を暖める、日光浴、日焼け、食事、身体の内部分でのエネルギー消費の多く、LEDや電球の点灯など。

7 4. $A \rightarrow B$: 重力は正の仕事をした。重力がする仕事により「重力の位置エネルギー $\rightarrow$ コースターの運動エネルギー」のようにエネルギーが移動した。

$B \rightarrow C$: 重力は負の仕事をした。重力がする仕事により「コースターの運動エネルギー $\rightarrow$ 位置エネルギー」のようにエネルギーが移動した。

$C \rightarrow D$: $A \rightarrow B$ と同じ。 $D \rightarrow E$: 重力がした仕事はゼロ。エネルギーは移動していない。

$E \rightarrow F$: $B \rightarrow C$ と同じ。

7 5. (1) 図13.28で右向きを正の向きとすると、荷物の変位は3.0 s間で $\Delta x = v \times 3.0 \text{ s} = 0.50 \text{ m/s} \times 3.0 \text{ s} = 1.5 \text{ m}$ 。ロープの張力がした仕事を $W_{\text{ロープ}}$ とすると $W_{\text{ロープ}} = 50 \text{ N} \times \Delta x = 50 \text{ N} \times 1.5 \text{ m} = \underline{75 \text{ J}}$
荷物は等速で移動しているから、ロープの張力と動摩擦力は大きさが等しいはずで、動摩擦力の大きさは 50 Nに等しく、向きは負の向きである。したがって、動摩擦力がした仕事を $W_{\text{マ}}$ とすると $W_{\text{マ}} = (-50 \text{ N}) \times 1.5 \text{ m} = \underline{-75 \text{ J}}$

(2) この3.0 s間で、75 Jのエネルギーがロープから荷物に与えられ、同時に摩擦力によって 75 J のエネルギーが荷物から奪われた。

(注) このエネルギーは摩擦熱のエネルギーになったと考えてよい。また、荷物が受けた仕事の「和」は $W_{\text{ロープ}} + W_{\text{マ}} = 25 + (-25) = 0 \text{ J}$ であり、荷物の運動エネルギーが変化していないことと整合している。75 Jのエネルギーは荷物を素通りしたとイメージ(解釈)できる。

7 6. 「 $W = F_x \Delta x$ p.58(13.11式)」を使って：図13.29より、重力の変位方向成分 F_x は $F_x = mg \sin \theta$ 、 $A \rightarrow B$ の変位 Δx は $\sin \theta = h / \Delta x$ より $\Delta x = h / \sin \theta$ 。したがって、荷物の $A \rightarrow B$ の移動で重力がした仕事 W_G は $W_G = F_x \Delta x = mg \sin \theta \times \frac{h}{\sin \theta} = \underline{mgh}$

「 $W = F \Delta h$ p.58(13.12式)」を使って： $F = mg$ 、 $\Delta h = h$ だから $W_G = F \Delta h = \underline{mgh}$

7 7. 質量 m [kg]の身体を持ち上げる力 F [N]がする仕事 W は、持ち上げた高さを h [m]として $W = F \times h = mg \times h = 50 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 8.0 \text{ m} = 3.92 \times 10^3 \text{ J} \div \underline{3.9 \times 10^3 \text{ J}}$ 。仕事率 $P = 3.92 \times 10^3 \text{ J} \div 20 \text{ s} = 196 \text{ W} \div \underline{200 \text{ W}}$ これは、32 Wの蛍光灯の消費電力の $196 \text{ W} \div 32 \text{ W} \div \underline{6 \text{ 本分}}$

(注) 実際にこれだけのエネルギー消費率で階段を上っているわけではない！立っているだけでも、いえ寝ているだけでも身体はエネルギーを消費している。体温を維持しているし、心臓・肺・脳・・・いろいろ活動している！p.59例題23(5)の重量挙げ選手の例が示唆する通り、身体を持ち上げていくには、位置エネルギーを増やすためだけでなく他の諸々のエネルギー消費が伴う。

なお、上述の通り「寝ているだけ」でも生命維持のためにエネルギーを消費しているわけで、その消費率は身体の質量 1 kg 当たり(日常の言い方では体重 1 kg 当たり)、大まかに 1 W/kg 程度である。また、非常に大まかに言って、問題 7 7 のような力学的なエネルギー消費に使われるのは、その時の身体のエネルギー消費の 1 割程度である(これは、多めに見積もった値で、何をやるかによって値にはかなり幅がある)。

7 8. 力 F [N]が t [s]間にする仕事 W [J]は、変位を Δx [m]として

$$W = F \Delta x = F \times (v t), \quad \text{仕事率 } P \text{ [W]は } P = \frac{W}{t} = \frac{F v t}{t} = \underline{F v \text{ [W]}}$$

79. $1\text{ kW}=10^3\text{ W}=10^3\text{ J/s}$ 。1 kWhとは、1 kWの消費電力(電気エネルギー消費率)で 1 時間($60\text{ s}\times 60=3600\text{ s}$)の間に消費する電気エネルギー。したがって、 $1\text{ kWh}=10^3\text{ J/s}\times 3600\text{ s}=\underline{3.6\times 10^6\text{ J}}$

$$3.6\times 10^6\text{ J}\div 20\text{ 円}=\underline{1.8\times 10^5\text{ J/円}}$$

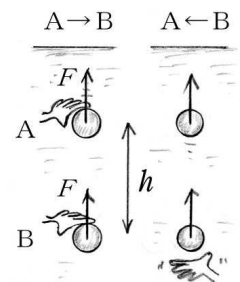
(注) 電力という用語は電気エネルギーの消費率 [J/s] や発電率 [J/s] として用いられている。

(補足) 問題 77 の例を使って、3 階(8 m)まで身体(50 kg)を持ち上げるための仕事(力学的なエネルギー消費量)が、電気エネルギーでは何円になるかを計算してみよう： $3.92\times 10^3\text{ J}\div 1.8\times 10^5\text{ J/円}=0.022\text{ 円程度}$ 。この計算結果を見て「えッ、安い！」と思った人も多いでしょう。でも、問題 77 解答の(注)に述べたように、実際に身体の中でのエネルギー消費は大まかに言ってこの値の10倍程度(多めの見積もり)。だから電気代で $0.022\times 10\div 0.2\text{ 円程度}$ 。30 階まで上がると2 円程度。

80. 居間と玄関を結ぶ廊下を、荷物を引きずって往復させたと想像しよう。荷物に働く動摩擦力の向きはつねに変位とは逆向きだから、動摩擦力がする仕事はつねに負である。したがって、荷物を往復させた場合、動摩擦力がする仕事の和は必ず負の値をもち、0 にはならない。よって、動摩擦力は保存力ではなく位置エネルギーをもたない。

(注) 「じゃあ、摩擦がなかったら、位置エネルギーはあるの？」…はい、形式的には「ある」と言えるかな。でも、位置エネルギーを無理に考えても、それはずっと 0 のままだから…やっぱり、位置エネルギーはないということですね。

81. 右図のように、水中でボールを $A\rightarrow B\rightarrow A$ のように距離 h [m] の間を往復させたと考えよう。ボールの体積変化が無視できるなら、ボールに働く浮力 F [N] は大きさが一定で、向きもつねに上向きである。したがって、 $A\rightarrow B$ では浮力がする仕事は $W_{A\rightarrow B}=-F\cdot h$ [J]、 $B\rightarrow A$ では $W_{B\rightarrow A}=+F\cdot h$ [J] となり、往復での仕事の和は $W_{A\rightarrow B}+W_{B\rightarrow A}=(-F\cdot h)+(F\cdot h)=0$ となる。したがって、浮力は保存力であり、位置エネルギーをもつ(ただし、上述のように多少の条件付きである)。



ボールを手持って水中に沈めてから放すと、ボールが勢いよく水面から飛び上がることがある。この運動を考察する際には上記の位置エネルギーを使うことができるだろう。

82. 最下点を位置エネルギーの基準(ゼロ)の位置とし、B点での速さを v として、B点とA点に対して力学的エネルギー保存の法則を適用すると

$$\frac{1}{2}mv^2+mg(2R)=\frac{1}{2}m\times 0^2+mgh \quad \therefore v=\sqrt{2g(h-2R)}$$

後半：「そう判断して」はいけない。B点において、ある値 v_B 以上の速度をもっていなくては無事にB点を通過できない——途中で車輪がレールから離れてしまう。これは「無事」とは言えない！

$mg l=\frac{1}{2}mv_B^2$ を満たす高さ l [m] だけC点より上からスタートさせなくてはならない。 v_B の値は「円運動(力学発展編)」を勉強すると計算することができるようになる。

83. 確かに重力は鉛直方向の運動を変化(加減・減速)させるはたらきをしているのだが、同時にレールから垂直抗力が働き運動の向きを変えている。自転車にたとえれば、重力がペダルをこぐことに対応し、垂直抗力がハンドルに相当している。エネルギーはペダルから与えられる。

なお、「重力と垂直抗力の合力がレールに平行な向きを向き、これが車体にエネルギーを与えている」と言ってもよいのだが、これだと垂直抗力もエネルギーの受け渡しに一役買っているようなニュアンスを感じかねないので要注意。もちろん、垂直抗力はレールの向きに垂直だから仕事は 0 である。

8 4. 最高点の座標(位置)を h [m]、重力加速度を $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 、ばね定数を $k=49 \text{ N/m}$ 、ボールの質量を $m=60.0 \text{ g}=60 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 、原点 O でのばねの縮みを $x=15.0 \text{ cm}=0.15 \text{ m}$ する。

最高点および原点 O ではボールの運動エネルギーは 0 であるから、最高点と原点 O について力学的エネルギー保存の法則を適用すると

$$\frac{1}{2}m \times 0^2 + mgh = \frac{1}{2}m \times 0^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{したがって} \quad mgh = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{であり}$$

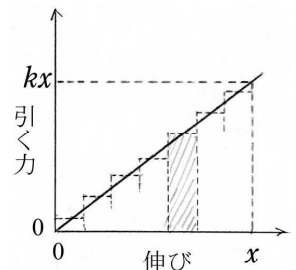
$$60 \times 10^{-3} \times 9.8 \times h = \frac{1}{2} \times 49 \times 0.15^2 \quad \text{これから} \quad h = 0.94 \text{ m} = 94 \text{ cm}.$$

[考察] 実際にこの実験を行った場合、ボールの質量に比べてばねの質量が無視できず、はじめの弾性エネルギーのうちかなりの部分が、ばね自体の運動エネルギーになってしまう！要するに、ばねが揺れて(暴れて?)しまう。ボールの上昇を上記の計算結果に近づけるには、なるべく軽いばねを使う必要があるだろう。

8 5. ばねを伸ばすとき、「ばねを引く力」は正の仕事をして、ばねにエネルギーを与えている。そのエネルギーは弾性エネルギーとしてばねに蓄えられる。一方、「ばねの弾性力」は、ばねを引いている手に働き、負の仕事をする。この力によって、ばねが手からエネルギーを受け取って(奪って)いる。この2つの力は作用反作用の関係にあり、大きさは同じだが向きは逆で作用点の変位は等しいから、2つの力がする仕事の絶対値は等しい。結局、手からばねにある量のエネルギーが移動したというイメージとピッタリ合っている！

エネルギー保存との関わり：上記の2つの力がする仕事が、絶対値は等しく符号が逆であるということは、手からばねへのエネルギーの移動過程において、エネルギーが増えたり減ったりはしない(エネルギーの発生や消滅がない)ということを示していて、その点でエネルギー保存に関わり、作用反作用の法則がそれを保証している。

8 6. 仕事(=力×変位)はエネルギーの移動の過程を意味しているから、伸ばす時にばねを引く力がした仕事 W は、ばねに与えたエネルギー U に等しい ($U=W$)。一端を固定したばねの他端を引き、ばねを自然の長さから x だけ伸ばしていくとする。ばねを引く力 F はフックの法則にしたがい $F=kx$ であり、右図のグラフ(実線)のように変化する。仮にこの力が階段状に変化したなら(右図の点線)、一つのステップにおいて力のした仕事は右図の斜線部分の面積に等しい。したがって、この階段を無限に細くしていけば、求める仕事 W は、右図のグラフの直線を一辺とする三角形の面積に等しいことが分かる (p.29問題50で等加速度運動の公式 $\frac{1}{2}at^2$ を導いたときと同じ論理)。したがって



$$U=W = \frac{1}{2}x \times kx = \frac{1}{2}kx^2$$

(補足) (1) $W=(\text{ばねを引く力の平均値}) \times (\text{変位}) = (\text{平均で} \frac{1}{2}kx) \times x = \frac{1}{2}kx^2$ と考えてもよい。

(2) 微積分を既に学習している人へ：伸び x の関数である力 $F=F(x)$ が、微小変位 Δx でする仕事 ΔW は次式で表される。

$$\Delta W = F(x) \Delta x$$

(微小変位 Δx に伴う力の変化を無視しているが、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限において、近似ではなくなる) したがって W は

$$W = \int dW = \int_0^x F(x') dx' = \int_0^x kx' dx' = \frac{1}{2}kx^2$$

これを理解しよう。いろいろと応用ができる！