ひろがる数学の世界

2

お茶の水女子大学
奈良女子大学
理系女性教育開発共同機構

はじめに

数学の授業では様々な内容を学んでいますね。現代の社会は、数学が無ければ生活できないと言ってもよいくらいです。特に、スマホ (スマートフォン) やパソコン、テレビなどデジタル化されたモノは、すべて二進数のお世話になっています（前著「ひろがる数学の世界」参照)。

本書ではこれまで学んできた計算方法や、図形などについての別な見方や新しい考え方について、楽しく学べるようにまとめました。

各章の内容の概要を示します。

第 1 章　数と文字式と計算術

小学校以来取り組んできた数と計算について、ちょっとした工夫で暗算で素早く結果を求めることができる工夫についてみてみます。文字式も活躍します。

第 2 章　ひろがる図形の世界

三角形の内角の和が 180°である事は、あまりにも当たり前かもしれません。でもちょっと見方を変えてみると、いろいろな図形の世界がみえてきます。どのような世界が広がっているか楽しんでください。

第 3 章　4 次元とは？

この章では「4 次元」という言葉を取り上げます。また「次元」という言葉についても改めて考えてみることにしましょう。4 次元についてみなさんが持っているイメージと比較しながら、読んでみてください。

第 4 章　立体の認識

漫画、アニメ、テレビ、映画、ゲームなどでよく見かける 3D 映像。従来の映像より本物に近く迫力がありとても魅力的な技術ですが、画面の中の映像であることは従来の映像と同じです。これらの間にはどのような違いがあるのかについて考えてみましょう。

本書を読んで、さらに数学に興味を持っていただける事を願っています。自分でさらに課題を見つけて探究してみてください。

お茶の水女子大学理系女性教育開発共同機構　加々美勝久
奈良女子大学理系女性教育開発共同機構　船越　紫
奈良女子大学理系女性教育開発共同機構　若林　智美

目次

第１章　数と文字式と計算術～小さな工夫で大きな成果～

小学校の算数で計算方法についてはしっかり学んできましたね。ここでは、これまでやってきた計算方法などについて、見方を少し変えることで、素早く計算できるような工夫を見てみます。なぜそのような方法で良いのかについても、**どうしてこれでいいの？**で数学的に解明していきます。暗算で素早く計算ができる「計算術」といえます。楽しんでみてください。

１．数の表し方

はじめに数の表し方について確認しておきます。

ふだん私たちは、543 と書いて「ゴヒャクヨンジュウサン」と読みます。読み方は日本語、英語、フランス語など言語によってさまざまですが、示す数は世界共通で 543 です。といわれて当たり前なのにと思わないでください。

このような表し方で、数の大きさをや個数を表すことができるようになるまでには、人類史上長い年月がかかりました。詳しく知りたい人は「零の発見」（吉田洋一著　岩波新書 R13）を読んでください。

日本での数の表し方は、五四三と書いても「ゴヒャクヨンジュウサン」とはなりません。きちんと書くと五百四十三ですね。

ローマ数字では、1 から 10 までは、Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ，Ⅸ，Ⅹとなります。この表し方の特徴に気がついたと思いますが、5 つ目には新しい記号Ⅴを作っています。5 より手前の 4 は 5 － 1 の意味でⅣ、5 より大きい 6 は 5 ＋ 1 の意味でⅥと表しています。次に 10 としてまた新しい記号Ⅹをつくり、10 を越えない 9 は 10 － 1 でⅨ、さらにⅩを越える 11 は 10 ＋ 1 でⅪと表します。つまり、数が大きくなっていくと、新しい記号を作って表そうとします。ちなみに 50 は L、100 は C，500 は D，1000 は M です。MMⅩⅩ は 2020 を表しています。ローマ数字では 3999 までしか表すことができません。

練習１．3999 をローマ数字で表してみましょう。

練習１の答え　 MMMCMⅩCⅨ

漢数字も百、千、万、億などと位に応じてを名前を作っていきます。
練習２．漢数字で大きな数はどこまで作られているか調べてみましょう。
練習２の答え　現在作られている最大の位は、「無量大数（むりょうたいすう）」

このように見ていくと、大きな数を表すには限界があるのではと思うかもしれませんね。ところが算用数字（アラビア数字）と位取り記数法が、それを解決してくれたのです。といっても、普段私たちが全く意識することなく使っているものです。位取り記数法は、「インド式数の表し方」と言われることもあります。そこには数字の使い方と数の表し方の素晴らしい発明、特に「0」があったからできることです。

今私たちが普通に使っている数字は、0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 の十種類です。しかし表すことのできる数には大きな数も小さな数も制限がありません。その表し方を「発明」したのがインドであることが分かっています。

位取り記数法とは、書いた数字の位置で「桁」が決まるということです。始めの例では、543 ＝ 500 ＋ 40 ＋ 3 を表しています。また、332 と書いた場合に 3 が 2 回ありますが、300 ＋ 30 ＋ 2 とそれぞれの 3 の意味が違います。同じ３でも、百の位の 3 と十の位の 3 になっています。10 を束にして繰り上がりを行うので、「十進位取り記数法」といいます。また、計算にも便利であることも重要です。漢数字やローマ数字は位取り記数法ではないので、足し算であっても計算するのは大変です。かけ算においてはなおさらです。

これまで見てきたように、インドで使われるようになった表し方ですが、今日使われている数字が「アラビア数字」と呼ばれるのは、アラビア人がこの方法を使って商売で素早く計算を行ったことで、広くいろいろな地域に伝わっていったので、「アラビア」の名前が使われているとのことです。

数の表し方にはこんな歴史があって、私たちがいま使っているんですね。ちなみに、1 無量大数を位取り記数法で表すと 10^{68}　で、0 を使って書くと、
100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
と、1 の右に 0 が 68 個並びます。

この十進位取り記数法の特徴を最大限に使っての「計算術」、暗算で計算

結果を求める方法をこれから学んでいきましょう。念のため手元に電卓を用意しておいてください。

２．足し算を見直すと～数のしくみを再考～

足し算はこれまでも十分に練習して、皆さん自信があるでしょう。でもちょっとした工夫をすることで、暗算で素早くできます。

準備運動　　まずは算数的な準備です。

2 桁の 2 数の足し算は暗算で素早くできるようにしておきましょう。2 桁の数の和は最大で 99 ＋ 99 ＝ 198 となりますね。すなわち 3 桁に繰り上がっても百の位は「1」です。これをしっかり押さえておきましょう。

＜4桁の2数のたし算＞

例1　7352 ＋ 6537

「ふつう」に計算しても特に問題ないですね。これをちょっとだけ工夫します。

＜計算方法＞　73 ｜ 52 と 65 ｜ 37 として、それぞれ 2 桁の数として和を求めます。138 と 89 になるので、並べて書いて答えは 13889 となります。確かめてみてください。

例2　5139 ＋ 2387

それぞれ右から 2 桁ずつ区切って上 2 桁と下 2 桁の和を求めます。51 ＋ 23 ＝ 74 と 39 ＋ 87 ＝ 126 となります。このときは下 2 桁の和が 100 を越えたので、74 に 1 をくわえて答えは 7526 になります。

ラビット 1　4桁の2数のたし算は、それぞれの数を右から2桁ずつ区切って、2桁の2数を足して、結果を並べて書く。

これからこの章では、計算のコツを学べばウサギのようにピョンピョンと跳ねるように素早く計算できるので、**ラビット法**と呼ぶことにします。

どうしてこれでいいの？

3 桁以上の数では、百の位と、十の位の間で区切る事は、元の数の下 2 桁は 00 とみて（例 1 では 7300 と 6500)、区切った左右で計算した後に「合体」しています。2 桁の 2 数の和は簡単に求まるので、一の位から順に計算していくよりスピードアップになります。

練習 3

(1) 5438 ＋ 3225=　　　　(2) 4989 ＋ 2788=

(3) 2248 ＋ 3843=　　　　(4) 654 ＋ 832=

練習 3 の答え

(1) 5438 ＋ 3225=8663
54 ＋ 32 ＝ 86 と
38 ＋ 25 ＝ 63 を並べる

(2) 4989 ＋ 2788= 7777
49 ＋ 27=76 と
89 ＋ 88 ＝ 177 を並べる
ただし 76 に 1 を足す

(3) 2248 ＋ 3843= 6091

(4) 654 ＋ 832=1486

どうでしたか。コツがつかめましたか。
この節は、ウオーミングアップですが、すぐに早くできなくても結構です。
このような頭の使い方を練習して身につけてください。
そのためには、次のように数や式に親しんでください。

①数を分解できるようにする

②数の特徴をつかむ

③乗法公式がスラスラ使える

④少しでも楽をしようと努力する。＜計算の順序を工夫＞

それぞれの具体例は次のようなものです。

①数を分解できるように

19 ＝ 20 － 1， 18 ＝ 2 × 9

②数の特徴をつかむ

5 ＝ 10 ÷ 2，25 ＝ 100 ÷ 4

③乗法公式

（a）　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

（b）　$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

（c）　$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

（d）　$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

④計算の順序を工夫

6 × 25 × 2 ＝ 6 ×（25 × 2）＝ 6 × 50 ＝ 300

３．かけ算の計算術

これから考えていく例は、かけ算について見ていきます。計算のちょっとした工夫で楽ちん♪！。

＜5の倍数と偶数のかけ算＞

例3　15 × 24 ＝ 15 × 2 × 12 ＝ 30 × 12 ＝ 360

例4　14 × 35 ＝ 7 × 2 × 35 ＝ 7 × 70 ＝ 490

ラビット2　5の倍数と偶数のかけ算は偶数を分解して、キリのよい数にしてかける

練習 4

（1）　25 × 12 ＝　　　　（2）　45 × 14 ＝

（3）　36 × 25 ＝　　　　（4）　56 × 25 ＝

練習 4 の答え

（1）　25 × 12 ＝ 25 × 4 × 3
＝ 300

（2）　45 × 14 ＝ 45 × 2 × 7
＝ 90 × 7
＝ 630

（3）　36 × 25 ＝ 9 × 4 × 25
＝ 900

（4）　56 × 25 ＝ 14 × 4 × 25
＝ 1400

さて、ここからは乗法公式の出番です。

文字式ではなく、実際の数の計算に乗法公式は大変役に立ちます。

＜11から19までの2数の積＞

例5　15 × 13 ＝（15 ＋ 3）× 10 ＋ 5 × 3

＝ 180 ＋ 15

＝ 195

ラビット3　11から19までの2数の積は、一方の数に他方の数の一の位を足して10倍。それに一の位どうしの積を足す。

どうしてこれでいいの？

2 数を 10 ＋ a，10 ＋ b と表します。この 2 数を掛け合わせると

（10 ＋ a）×（10 ＋ b）

展開して、10 でくくると

（10 ＋ a ＋ b）× 10 ＋ ab

となります。

練習 5　次の計算をやってみましょう。

（1）14 × 12 ＝　　（2）16 × 13 ＝

（3）19 × 17 ＝　　（4）13 × 18 ＝

練習 5 の答え

（1）14 × 12 ＝（14 ＋ 2）× 10 ＋ 4 × 2

＝ 168

（2）16 × 13 ＝（16 ＋ 3）× 10 ＋ 18

＝ 208

（3）19 × 17 ＝ 260 ＋ 63

＝ 323

（4）13 × 18 ＝ 210 ＋ 24

＝ 234

ラビット3の応用を考えて見ましょう。

＜十の位がmの2数の積＞

例6　$34 \times 37 = (34 + 7) \times 30 + 4 \times 7$

$= 41 \times 30 + 28$

$= 1230 + 28$

$= 1258$

ラビット3'　十の位がmの2数の積は、一方の数に他方の数の一の位を足して10m倍し、一の位どうしの積を足す。

どうしてこれでいいの？

2 数の 10 の位を m とし、それぞれ 10m ＋ a、10m ＋ b とすると、

$(10m + a) \times (10m + b)$

$= (10m + a + b) \times 10m + ab$

練習 6

(1)　$23 \times 27 =$　　(2)　$31 \times 36 =$

(3)　$45 \times 47 =$　　(4)　$63 \times 64 =$

練習 6 の答え

(1)　$23 \times 27 = 30 \times 20 + 21$

$= 621$

(2)　$31 \times 36 = 37 \times 30 + 6$

$= 1116$

(3)　$45 \times 47 = 52 \times 40 + 35$

$= 2080 + 35$

$= 2115$

(4)　$63 \times 64 = 67 \times 60 + 12$

$= 4020 + 12$

$= 4032$

＜十の位が同じで一の位の数字がたして10になる2桁の数のかけ算＞

例7　78 × 72 ＝（7 ＋ 1）× 7 × 100 ＋ 8 × 2

＝ 5600 ＋ 16

＝ 5616

ラビット４　十の位が同じで一の位の数字がたして10になる2桁の数のかけ算は、十の位の数字に1を足し、それに十の位の数字をかけて100倍した結果に、一の位どうしをかけて足す（右に並べる）　。

どうしてこれでよいの？

2 数を 10m ＋ a，10m ＋ b とします。ここで、さらに条件から a ＋ b ＝ 10 です。

（10m ＋ a）×（10m ＋ b）

乗法公式を使って展開すると 10m × 10m ＋（a ＋ b）× 10m ＋ ab

a ＋ b ＝ 10 から　＝ 100m × m ＋ 100m ＋ ab

100m でくくって　＝ 100m（m ＋ 1）＋ ab

これは簡単ですね。

練習 7

（1）24 × 26 ＝　　（2）68 × 62 ＝

（3）53 × 57 ＝　　（4）84 × 86 ＝

練習 7 の答え

（1）24 × 26 ＝ 3 × 2 × 100 ＋ 24
＝ 624

（2）68 × 62 ＝ 7 × 6 × 100 ＋ 16
＝ 4216

（3）53 × 57 ＝ 6 × 5 × 100 ＋ 21
＝ 3021

（4）84 × 86 ＝ 9 × 8 × 100 ＋ 24
＝ 7224

<一の位が同じで十の位が足して10になる2桁の2数のかけ算>

例 8　　43 × 63 ＝ 2709

4 × 6 ＋ 3 ＝ 27　　3 × 3 ＝ 09

ラビット５　一の位が同じで十の位が足して10になる2桁の2数のかけ算は、十の位の数どうしをかけて一の位の数を足す。その右に一の位を2乗した数を（2桁にして）足す。

どうしてこれでいいの？

2 数を 10m ＋ a、10n ＋ a と表します。m ＋ n ＝ 10 です。

$$(10m + a) \times (10n + a) = 100mn + 10(m + n)a + a^2$$
$$= 100(mn + a) + a^2$$

mn ＋ a を 100 倍しているので、下 2 桁は 00 になるので、a^2　を右に並べて書けばよい。

練習 8

（1）　51 × 51 ＝

（2）　69 × 49 ＝

（3）　33 × 73 ＝

（4）　87 × 27 ＝

練習 8 の答え

（1）　51 × 51 ＝ 2601

5 × 5 ＋ 1 ＝ 26

1 × 1 ＝ 01

（2）　69 × 49 ＝ 3381

6 × 4 ＋ 9 ＝ 33

9 × 9 ＝ 81

（3）　33 × 73 ＝ 2409

3 × 7 ＋ 3 ＝ 24

3^2 ＝ 09

（4）　87 × 27 ＝ 2349

8 × 2 ＋ 7 ＝ 23

7^2 ＝ 49

<10の倍数をはさんだ2桁の2数のかけ算>

例 9　$71 \times 69 = (70 + 1)(70 - 1)$

$= 70^2 - 1^2$

$= 4900 - 1$

$= 4899$

ラビット６　10の倍数をはさんだ2桁の2数のかけ算は、それぞれの数で10の倍数との差を求めて、（10の倍数の2乗）－（差の2乗）。

どうしてこれでいいの？

2 桁の 2 数は $10a + b$，$10a - b$ と表せます。

$(10a + b) \times (10a - b) = 100a^2 - b^2$

すなわち、それぞれの数の平方の差ですね。

練習 9

(1)　$41 \times 39 =$　　　(2)　$21 \times 19 =$

(3)　$52 \times 48 =$　　　(4)　$63 \times 57 =$

練習 9 の答え

(1)　$41 \times 39 = 40^2 - 1^2$

$= 1600 - 1$

$= 1599$

(2)　$21 \times 19 = 20^2 - 1^2$

$= 400 - 1$

$= 399$

(3)　$52 \times 48 = 50^2 - 2^2$

$= 2500 - 4$

$= 2496$

(4)　$63 \times 57 = 60^2 - 3^2$

$= 3600 - 9$

$= 3591$

ラビット６と同じ乗法公式を因数分解の公式とみる考えを使うと次のよう

な計算ができます。

例 10　$57^2 - 56^2 = 57 + 56 = 113$

例 11　$129^2 - 127^2 = (129 + 127) \times 2 = 512$

ラビット６’2数の平方の差は、2数の和に2数の差をかける。

どうしてこれでいいの？

因数分解の公式「和と差の積は平方の差」をそのまま使います。

$a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

2 数の差が小さいときには抜群の効果が出ます。

練習 10

（1）$28^2 - 27^2 =$　　（2）$43^2 - 41^2 =$

（3）$233^2 - 232^2 =$　　（4）$1562^2 - 1560^2 =$

練習 10 の答え

（1）$28^2 - 27^2 = 28 + 27$
$= 55$

（2）$43^2 - 41^2 = (43 + 41) \times 2$
$= 168$

（3）$233^2 - 232^2 = 233 + 232$
$= 465$

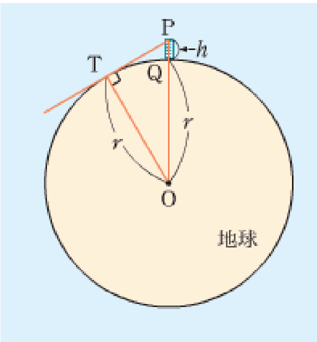
（4）$1562^2 - 1560^2 = (1562 + 1560) \times 2$
$= 3122 \times 2$
$= 6244$

４．問題解決への応用

ラビット 6’は、ちょっとした工夫で電卓を使うときにも使えます。

三平方の定理の利用としてスカイツリーからみえる範囲を考える計算方法をみてみます。

地球の半径を r km、見る位置 P の高さを h kmとすると、P から地球上のみえる最大の範囲は、P から地球に引いた接線を考えればよいことになります。



P から引いた接線の地球との接点を T とすると、みえる範囲は PT の長さを考えればよいことになります。
このとき三角形 PTO は∠ PTO ＝ 90° の直角三角形になります。

ここに三平方の定理を使うと

$$\mathrm{PT} = \sqrt{(r+h)^2-r^2} = \sqrt{(2r+h)h}$$

となり電卓を使って計算するときにも簡単になります。

具体例では、地球の半径を 6300 ㎞、スカイツリーの大回廊の高さを 450m ＝ 0.45 ㎞とすると、r=6300、 h ＝ 0.45 となり

12600.45 × 0.45 の平方根を求めればよいことになります。ちょっと工夫すると電卓を使う場合でも手数を省くことができます。（図 1　学校図書株式会社中学校数学３から引用）

ラビット法はここまでです。

５．自分でも工夫して簡単な計算方法をみつけてみよう

この章で見てきたように、少し工夫することで計算結果がとても簡単にしかも暗算で求めることができることがわかっていただけましたか。ラビット法にまとめましたが、使いこなすには少し練習が必要です。楽しみながらなれて使いこなしてみてください。

計算は、決まった手順にしたがって、順にやっていけば誰でも必ずできます。また、現実の問題を考えるときには、コンピュータなどで結果は簡単に求めることができます。でも、計算なんて面倒だなんて思わないで、どうすればできるだけ素早く簡単にできるかなといつも思っていることで、自然と効率よく計算できるようになります。この章で学んだことだけでなく、これからも自分なりの工夫をして計算方法をみつけてみませんか。ぜひチャレンジしてください。

参考資料

中学校数学３　学校図書株式会社
インド式計算ドリル　中村亨著　監修加々美勝久　晋遊舎 2007
東京国立博物館「親子で体験！インド式計算」講座資料 2015.3.27
放送大学東京足立学習センター面接授業学び直しの数学　授業資料 2016.6

第2章　ひろがる図形の世界

この章では、図形を考える空間について、いろいろな見方をすることで、考える図形の世界が変わることを見て見ます。あまり厳密に進めるのではなく、直観的なイメージを持ちながら想像して楽しく思考実験をしてください。

１．図形を考える空間について

新聞にこんな記事がありました。（日経産業新聞 2019 年 10 月 18 日）（図 1）「最先端数学でスーツ採寸」「スマホ写真を AI 解析」と言う見出しが付いています。読んでみると、開発した会社の社長の説明では、「私たちが普段認識する『ユークリッド幾何学』ではわずかな体型の差でも、相対性理論などの基礎となる『リーマン幾何学』の世界で画像を展開すると変わる」等と書かれています。幾何学にもいろいろな考え方があるのでしょうか。

図 1

本章で、ちょっと覗いてみましょう。

中学校の図形の学習は、様々な用語を「定義」していろいろな性質を探っていきますね。例えば「直線」とは「両方に限りなく伸びているまっすぐな線」とか、「線分 AB」とは、「直線のうち点 A から点 B までの部分」などで

す。さらに、2 直線の位置関係では、「平面上の 2 直線は、交わるか交わらないかのどちらかである」等という性質も当たり前のように思われることも、一つひとつ確認していきます。

２．ユークリッド空間

ところで、はじめに出てきたユークリッド幾何学と言うことばがありますが、私たちがふだん学校の数学で「図形」の学習をする時には、ユークリッド空間の中でユークリッド幾何を考えています。

まず「ユークリッド」とは古代ギリシャの数学者の名前[1]です。Eucleides とかかれ、「エウクレイデス」ともよばれますが、英語風の呼び方で「ユークリッド」となります。紀元前 4 世紀末から紀元前 3 世紀にかけてアレキサンドリアで活躍されたと考えられています。特に古代ギリシアで発展した平面幾何学などを「原論[2]」と言う本にまとめました。

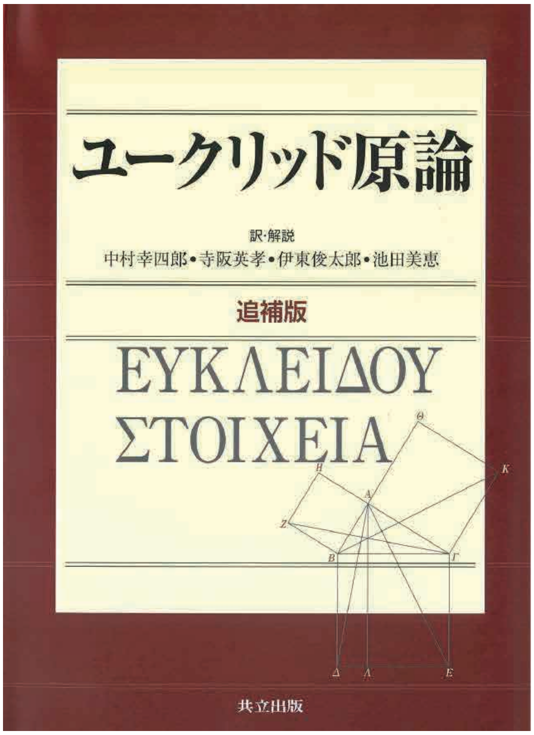


図 2

図 3

図 2 は日本語に訳され、現在も手に取ってみることのできる原論の表紙です。図 3 はその中に紹介されている、ギリシャ語で書かれている「原論」の表紙です。「Ε Υ Κ Λ Ε Ι Δ Ο Υ」は「エウクレイデス」と読み、その下の「Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Α」は「ストイケイア」と読むそうです。元は全 13 巻と言われていますが、日本語に訳された本は、1 冊にまとめられて、全巻が収められています。

どんなことが書かれているかを見ると [1)]

1 巻～ 4 巻　比例論を使わない平面幾何
5 巻　比例論
6 巻　比例論の幾何学への応用
7 巻～ 10 巻　数論
11 巻～ 13 巻　立体幾何

これから分かることは、「三角形の内角の和は 180 度である」ことです。私たちは、どんな三角形でも 3 つの角の和が 180 度になることは知っています。小学校 5 年生でも習ってきているし、中学校 2 年生では証明もできます。

ここで証明してみましょう。

例えば図 4 のように△ ABC の頂点 A を通って、辺 BC に平行な直線 l を引きます。

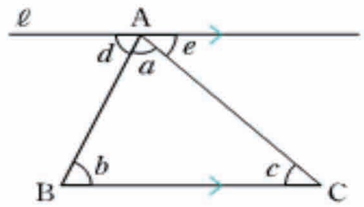


図 4

［証明］ ℓ // BC だから∠ d ＝∠ b （錯角）
∠ e ＝∠ c （錯角）

∠ a ＋∠ b ＋∠ c
＝∠ a ＋∠ d ＋∠ e
＝ 180 °（平角） Q.E.D.　（出典　中学校数学 3　学校図書株式会社）

どうでしたか。

ここでは、平行線の性質の 1 つである、「平行線の錯角は等しい」をつかって、頂点 A に角を集めたことになります。また、このような平行線は引くことはできますが、1 本しかありません。

これは、「直線 ℓ 上にない 1 点を通り、ℓ に平行な直線は 1 本しかない」

という性質を使っています。

これが、前に出てきた「ユークリッド幾何学」の重要な性質になります。

ユークリッドの原論では、全ての考え方のもとになる事柄を、「公準」として、５つ挙げています。これは、「図形を考える上で全ての根拠として使ってください。はじめから認めましょう。」としてまとめられたものです。次のようになっています。[2)]

次のことが要請されているとせよ。

1　任意の点から任意の点へ直線を引くこと

2　および有限直線を連続して一直線に延長すること。

3　および任意の点と距離（半径）とをもって円を描くこと。

4　およびすべての直角は互いに等しいこと。

5　および 1 直線が 2 直線に交わり同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば、この 2 直線は限りなく延長されると 2 直角より小さい角のある側において交わること。

これが私たちがふだん図形を考える大前提として与えられている事柄です。

この 5 がとても長々と書かれていることが、これからの重要なポイントになります。

そこから、上で証明したように、三角形の内角の和は 180° であることがわかります。「えっ！そんなことあたりまえですよ」という声が聞こえてきそうです。そうなんです。179° でもなく、181° でもなくぴったり 180° になります。これはとても重要なことです。この性質を使うと、よく知っている、n 角形の内角の和は 180° ×（n －２）、たとえば五角形の内角の和は 180° × 3 ＝ 540° 、や九角形の内角の和は 180° × 7 ＝ 1260° などであることが分かります。実はこの三角形の内角の和が 180° であることこそが、ユークリッド幾何学の特徴なんです。

次の節からは、本格的に思考実験を行います。

３．三角形の内角の和が180°より大きい図形の世界

これまで見てきたように、授業で習う平面図形では、三角形の内角の和が180°である事で、多角形の内角の和や様々な角の関係や大きさを求めます。

では、三角形の内角の和が 180 °より大きな図形の世界なんて考えられるのでしょうか。

そこで、これまで普通に使ってきた、直線や角度についてもう一度見直してみましょう。まず直線や線分ですが、線分は直線の一部分です。ですから、直線を決めれば線分は決まりますね。では、直線ですが、「真っ直ぐな線」だとしてきましたが、持っている性質に目を付けると、「2 点を結ぶ最短経路」になっています。さて、このような「線」を直線とすると、どんなことが考えられるのでしょうか。地球をモデル化した、地球儀で考えてみます。この地球儀上で日本の東京を A、オーストラリアのシドニーを B、アメリカ合衆国のサンフランシスコを C、の 3 都市を結ぶ「三角形 ABC」を考えます。三角形は地球儀上のそれぞれの 2 地点を最短になるような「線」で結びます。このとき、地球儀は完全な「球」であると考えます。（図 5）

このような球面上での直線はどのように考えれば良いでしょうか。

大航海時代に、船が大陸間などを目指して海上を進むときにとった航路が、この「直線」です（実際には障害を避けて通っているようです）。このようなコースは大円コースなどとも呼ばれます。具体的には、地球儀の中心を通る平面で切断すると、切り口は円になります。考えている 2 地点が円周上に来るように地球儀の中心を通る平面で切断したときの短い方の弧の長さが、この地球儀の表面で 2 地点を結ぶ線で最も短いものになります。これが球の表面で図形を考えるときの「直線・線分」になります。直線のイメージができましたか。「考えている球の中心を通る平面による切断面にできる円の円弧」が直線です。そのうちの短い方を使います。

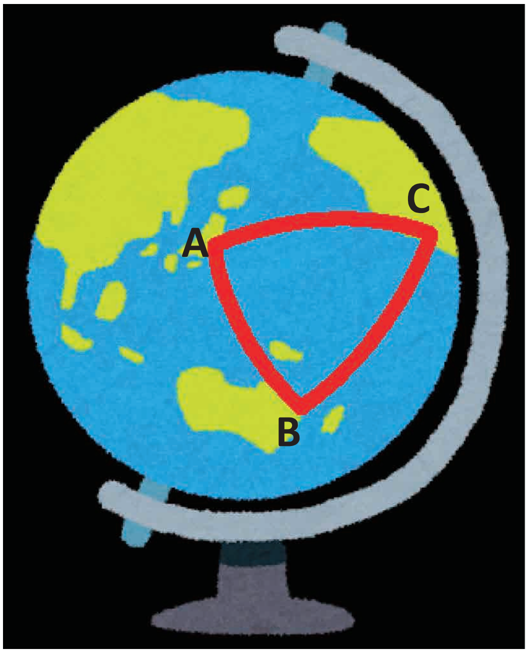


図 5

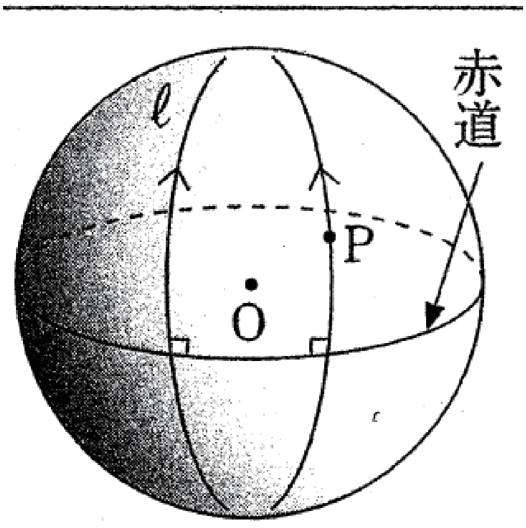


図 6[3)]

ここでできた三角形 ABC の内角の和は 180°より大きくなります。

図 6 の赤道と緯線で考えると、わかります。

赤道の所ではそれぞれの「直線」が直角に交わっているので、この２つで和は 180°になります。これと北極のところにできる角があるので、180°より大きくなります。このとき角度はそれぞれの点で接線（普段使っている直線）を考え、そのなす角を測ります。

さらに図 6 から、平行線が引けないことがわかります。すなわち、「直線」ℓ とその直線上にない点 P を通る直線を引くと、必ず北極と南極で交わるので、平行線は 1 本も引けないのです。

このような球面を、「リーマン面」といいます。「リーマン面」で考える図形の世界「リーマン幾何学」への入り口に立てました。私たちの世界を地球規模で見ると、このような世界なんですね。また、リーマン幾何学は、アインシュタインの一般相対性理論の建設に用いられました。

（リーマンは人名です。参考資料参照）

４．三角形の内角の和が180°より小さい図形の世界

図 7

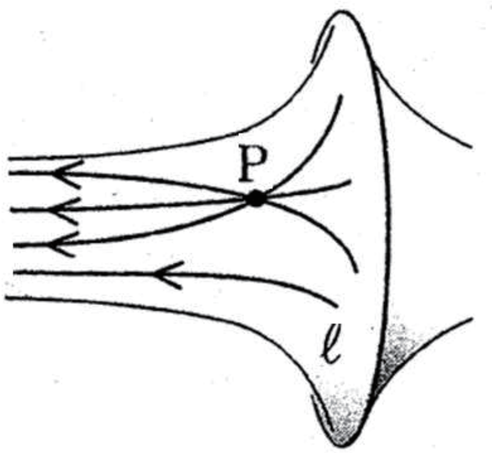


図 8[3)]

さて、前の節では三角形の内角の和が 180 °より大きい世界を考えましたが、180 °より小さい世界について考えてみます。

図 7 は皆さんが知っているトロンボーンで音が広がって出て行く部分です。ベルと言いますがこのような曲面をモデルとして、図形を考えます。

この面全体を「平面」と考え、「直線」はやはりこの平面上の 2 地点を結ぶ最短の経路になります。「測地線」と言われるものす。図 8 でイメージを持ってください。この世界では、図 9 のように、に平行な直線を無限に引くことができます。ここで三角形を作ると、内角の和は 180 °より小さくなります。

このような世界で考える幾何学を、「ボヤイ・ロバチェフスキー幾何学」とか「双曲幾何学」などと言います。（ここに出てきた「双曲」とは反比例を表すグラフに付いている双曲線の「双曲」と同じ意味です。）また、図 8 で表される平面〔曲面）のモデルを、「ベルトラミの擬球」と言います。

（ボヤイ、ロバチェフスキー、ベルトラミは人名です。参考資料参照）

５．いろいろな幾何学

これまで見てきた、三角形の内角の和が 180°より大きい世界や、180°より小さい世界で考える幾何学を、「非ユークリッド幾何学」といいます。もう一度振り返ると、私たちがふだん学校で考えている図形はユークリッド空間で考え、ユークリッド幾何学と言われています。このように、図形の考え方は一通りではなく、「非ユークリッド幾何学」というものがあることがわかりました。

もう少し見てみると、図形の形そのものは重要ではなく、図形を切り離したり貼り付けたりすることなく変形してつながりを調べる「位相幾何学（トポロジー）」。例えば、そこでは、円・正方形・三角形などは皆同じ図形と見なします。美術の写生などでも見られる、鉄道のレールが真っ直ぐに伸びているところを見るとはるか遠くでは 1 点に集まっているように見える世界で考える図形を「射影幾何学」など、条件を変えたり、身のまわりの世界をどのような視点で見るかで様々な「○○幾何学」が考えられています。高校では、式と図形を融合して、「解析幾何学」なども学習します。興味がわいた人は少し調べてみてください。

式などを使わないときちんと説明ができない分野もありますが、イメージを持てれば理解できる幾何学もあります。すこし視野を広げて新しい世界を見てみてください。

参考資料

＊リーマン：ドイツの数学者（1826 ～ 66）

＊ボヤイ：ハンガリーの数学者（1802-60）

＊ロバチェフスキー：ロシアの数学者（1793-1856）

＊ベルトラミ：イタリアの数学者（1835-1900）

1)　数学入門辞典　上野健爾他編　岩波書店　2014
2）　ユークリッド原論 追補版　中村幸四郎他訳　共立出版　2019
3）　“疑問”に即座に答える算数・数学学習小事（辞）典　仲田紀夫　黎明書房 2010　p.50 から作成

第 3 章　4 次元とは？

みなさんは 2 次元空間や 3 次元空間といった言葉を聞いたことがありますか？「〇次元空間」という堅苦しい言い方には馴染みがなくても、「空間」を省略した「2 次元」「3 次元」という言葉には聞き覚えがあるのではないかと思います。これらの言葉に対してどのようなイメージを持ち、どのようなものを思い浮かべますか？

1. 身近な「次元」

一般に 2 次元という言葉は平面的なものに対して、そして 3 次元という言葉は立体的なものに対して使用されることが多いので皆さんが持つイメージもこれに近いのではないかと思います。

特に最近ではこれに関連して 3D という言葉を耳にする機会が増えてきました。「3D」という言葉に使用されている「D」という文字は「dimensional」あるいは「dimensions」の頭文字で、日本語では「次元」という言葉に対応します。つまり「3D」は「3 次元の」あるいは「3 次元」を意味する言葉ということになりますね。この言葉は、具体的な例としては構造などのモデリングや立体視の以下のような用語などに用いられています。

3D 映画
3D 音響
3D テレビ
3DCG
3D モデリング
3D プリンター
3D プロジェクションマッピング

テレビや映画をはじめとして様々な場所で 3D という言葉が使用されていることがわかりますね。また最近では「体感型 4D 映画」「4DX」「4D アトラクションシアター」などの言葉にもあるように、「4D」という言葉も非常に身近になってきました。3D と同様に、この「4D」という言葉も日本語の 4 次元に相当する「4　dimensions」を省略した言葉になっています。このように最近では「次元」という言葉が非常に身近になっており、私たちはそれを語源とす

る作品や技術に日々触れていることが分かります。いくつか挙げましたが、どうやら映画においては「4D」という言葉を用いた表現がたくさんがあるようです。ここではこれらを単に「4D 映画」と呼ぶことにしましょう。
この 4D という言葉に踏み込む前に、映画における 2D と 3D という 2 つの言葉について簡単に触れておきます。

実は映画には 2D 映画、3D 映画という言葉も存在します。2D 映画はいわゆる普通の映画で、通常の 2 次元的な、つまり平面的な映像を楽しむものです。3D 映画は通常の映像に奥行きを加える技術を用いることで、3 次元的な、つまり立体的な映像を楽しむものです。映像に奥行きが加わることで実際の空間を見ているような感覚に近づきます。そのため 2D 映画のように第三者としてスクリーンを見ているのではなく、映像で描かれている場面に自分自身も存在しているかのように感じることができるのが 3D 映画の大きな特徴です。そしてこの 3D 映画と区別するために、それまでの通常の映画を 2D 映画と呼ぶようになりました。
そしてこのような従来の映画（2D 映画もしくは 3D 映画）に加えてシートの振動、風や水しぶき、匂いや煙など、視覚や聴覚（音）以外の感覚を与える設備を使用した映画が 4D 映画となっています。単純に映画というだけではなく、アトラクションのような扱いになっているケースが多いことにも納得ができます。
これらを簡単にまとめると、2D 映画の平面的な映像に奥行きの情報を付け加えることで映像を立体的にしたものが 3D 映画と呼ばれ、さらにそこに映像や音以外の要素を加えたものが 4D 映画と呼ばれていることになります。

しかし比較してみると、2D 映画や 3D 映画は映像がそれぞれ 2 次元（平面）的、3 次元（立体）的であるのに対して、4D 映画は従来の 2 次元的もしくは 3 次元的な映像に、映像とは別の要素を加えているだけです。
4 次元という言葉が何を意味しているかについてはまだ触れていないので曖昧な言い方ではありますが、映像そのものが 4 次元的（？）と呼ぶことができそうなものに進化したというわけではないようです。映像が 2 次元的、3 次元的であるにも関わらず、これを「4D」と呼んでしまうのは本当に正しいのでしょうか？

なんだか騙されているような気持ちにはなりませんか？

2. 4 次元に関する疑問

わたしは子供の頃、次元に関する次のような説明を聞いたことがあります。

1 次元は直線
2 次元は平面
3 次元は空間
4 次元は空間＋時間

みなさんも同じような話を聞いたことがあるかもしれませんね。説明というよりはただ事実として聞かされただけですが、当時の私はこの説明でなんとなくわかったような気になっていました。
しかしそこから少し年月が経ち少し成長した頃、あることに気付きました。それは 4 次元を題材として取り扱っている漫画やアニメ、SF の世界の中で、4 次元という言葉が「空間＋時間」とは異なる意味で使われているケースがある、というものでした。

次の 2 つを比較してみてください。

・タイムマシーン

タイムマシーンが出てくる物語はたくさんありますね。このような世界では普通の空間に加えて、時間（過去・未来）を行き来することができるという設定が加わっている場合が多いです。これなら 4 次元は「空間＋時間」ということで特に違和感は感じません。

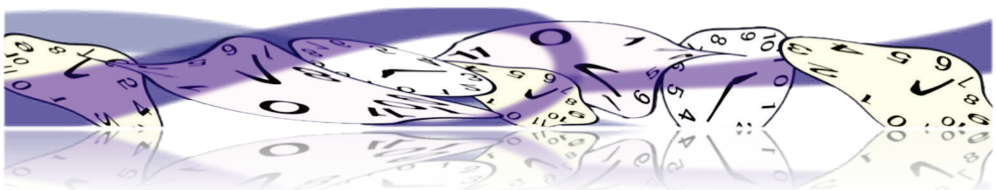
・4 次元ポケット

世代を超えて人気のあのネコ型ロボットが持っている不思議なポケットですね。このポケットは名前がまさに「4 次元」なのですが、ポケットそのものは時間とは関係がありません。このポケットは、その中に本来そこにはないはずの空間が広がっているというものです。

これに限らず他の作品でもワープができるという設定や空間がねじれるという表現を見たことがありますが、これらはどれも時間という表現ではなかったように記憶しています。これは一体どういうことでしょうか。4 次元は時間が関係しているのではなかったのでしょうか？

しかもあのネコ型ロボットの世界には 4 次元のポケットだけではなくタイムマシーンも存在しているはずです。これではなおさら混乱してしまいます。私自身は混乱したというほど当時は真面目に考え込んでいたわけではありませんが、「…あれ？」という程度の違和感は残りました。しかし当時は 4 次元という言葉に「現実の世界ではあり得ないもの」というイメージを持っていたので、「そんなものかな？」と思っていました。

「2 次元」や「3 次元」という言葉は日常的に耳にする機会がありますが、常に同じような意味で用いられているように思います。しかし「4 次元」という言葉の意味は 1 個ではありません。
この言葉は複数の意味を持っていても良いのでしょうか？
また、そもそも空間とは全く関係がなさそうな「時間」を付け加えたものを 4 次元と呼ぶのは本当に正しいのでしょうか？



そして関係がなさそうなものを付け足して「4 次元」と呼んでしまうことに対して感じる違和感は、先ほどの 4D 映画に対して感じた疑問となんとなく似ていると思いませんか？

この「次元」という言葉を改めて見てみると、そこに付随している数字の意味も気になってきます。1 次元、2 次元、3 次元、4 次元と、何かが順に 1 個ずつ増えているようですが、一体何が増えているのでしょうか？

ここからは次元とは何か？ということについて考えていくことにしましょう。

3.　「次元」と直線と座標

次元とは「空間内の位置を表現するのに必要な数値の個数」のことです。
これは空間の広がり具合をあらわす指標として考えることができます。

少し難しく見えるかもしれませんが安心してください。ゆっくりと読んでいくことにしましょう。

空間の広がり具合と書いてありますが、これはどの方向に空間が広がっているのか、つまりその空間の中にいる人がどの方向に動くことができるのかという意味だと考えても問題ないでしょう。数学ではこの空間の広がり具合、つまりどの方向に空間が広がっているのかを、直線を用いることで視覚的に表現します。
このとき、1 本の直線で表現できる方向はまとめて 1 個の方向として考えます。例えばまっすぐ前に進む方向とそれを逆走する方向は 1 本の直線で表現することができるので、「1 個の方向」として考えることになります。

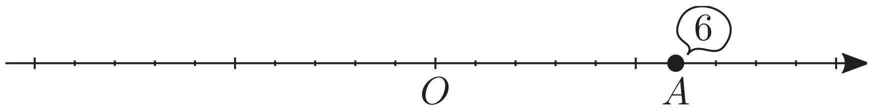
そしてこの空間の広がり具合を表す直線を数直線とみなすことで、数直線の座標（目盛り）を読むことができます。この座標（目盛り）が、「空間内の位置を表現するのに必要な数値」に対応します。ただし考えている空間によってはその空間の広がり具合を表す直線が複数存在する場合があります。例えば空間の広がり具合を表す直線が 3 本である場合は、3 本の数直線からそれぞれの座標（数値）を読み取ることになるため、数値が 3 個得られます。そのため「空間内の位置を表現するのに必要な数値の個数」という説明になるのです。それぞれの数直線から 1 個ずつ数値を読み取るので、次元は「空間内の位置を表現するのに必要な数値の個数」もしくは「空間の広がり具合を表す直線の本数」と考えることができそうですね。

それではここまでの説明を視覚的イメージと合わせて、1 次元空間から順に確認していきましょう。

混乱を避けるために 1 個注意しておきます。数学において「空間」という言葉を用いるときは、私たちが実際に住んでいるこの空間とは別物として考えることが多いです。そのため空間という言葉の使い方に少し違和感を感じる人がいるかもしれませんが、ここでは空間という言葉の意味はあまり気にしなくても大丈夫です。

1 次元空間

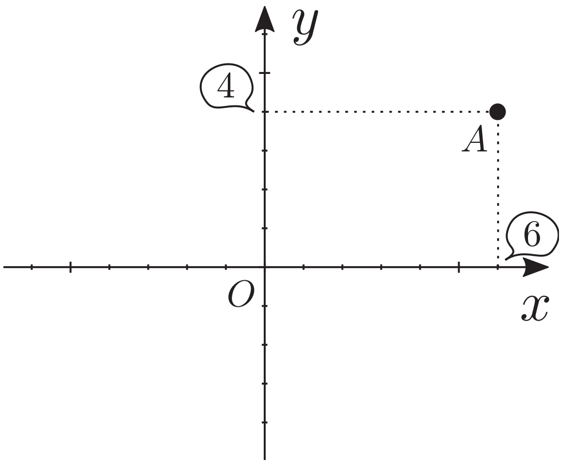
これは空間が広がっている方向が **1 個**、つまりその空間にある点 A が動くことができる方向が **1 個**だけというものです。これを図で表現すると、1 次元は「1 本の直線」になります。
この直線を数直線とみなして、その数直線の座標（目盛り）を読むことで、「**1 個**の数値で 1 次元空間内の位置を表現できる」ことになります。



2 次元空間

これは空間が広がっている方向が **2 つ**、つまりその空間にある点 A が **2 つ**の方向に動くことができるというものです。先ほどの 1 次元空間が広がる方向をヨコとすると、タテ方向にも空間が広がっているという状況です。ヨコ方向の広がりを先ほどの 1 次元の表現のとおり直線で表現し、これに合わせてタテ方向の広がりにも同様にもう一本別の直線を用いることにします。すると一般に xy−平面や座標平面と呼ばれるものができあがります。この平面が、2 次元空間を図で表現したものになります。

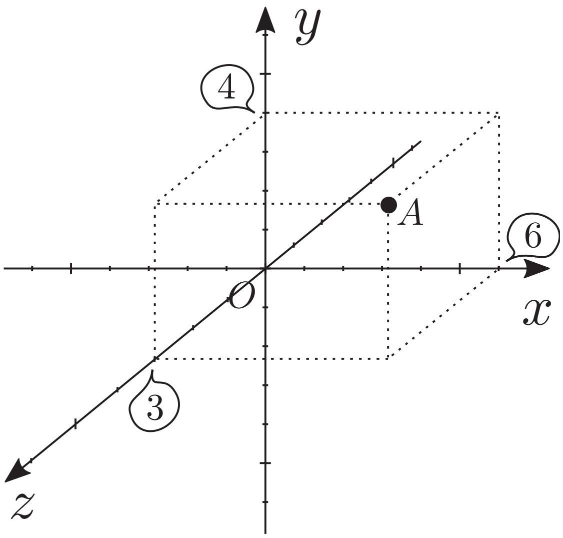
この **2 つ**の直線をそれぞれ数直線、すなわち xy−平面の x 軸、y 軸とみなして、座標（x 座標，y 座標）を読み取ることで、「**2 個**の数値で 2 次元空間内の位置を表現できる」ことになります。



<u>3 次元空間</u>

これも同様に、空間が広がっている方向が **3 個**、つまりその空間にある点 A が **3 個**の方向に動くことができるというものです。簡単に言うと、平面である 2 次元空間に奥行きを表す方向を加えたものです。平面の広がりの 2 つの方向を表すタテ・ヨコの直線に奥行きの方向である 3 つ目の直線を加えることで、3 次元空間の図的表現が出来上がります。日常で単に「空間」という言葉で表現されるものに対応します。

タテ・ヨコ・奥行きの **3 つ**の直線をそれぞれ数直線、すなわち x 軸、y 軸、z 軸とみなして、座標（x 座標，y 座標，z 座標）を読み取ることで、「**3 個**の数値で、3 次元空間内の位置を表現できる」ことになります。



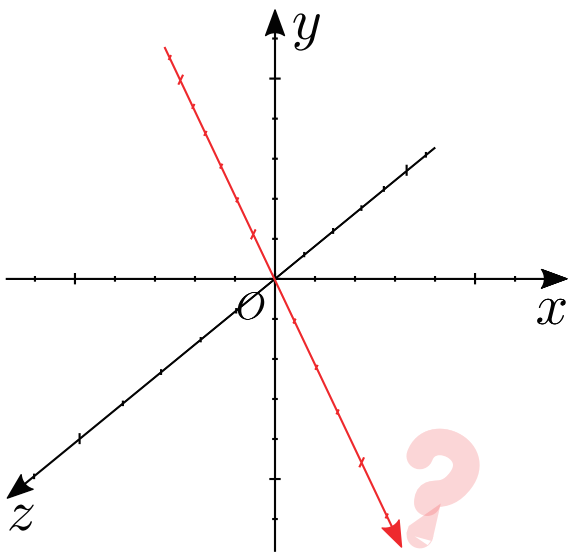
4.　「4 次元」と直線と座標

<u>4 次元空間</u>

1 次元空間に新たな方向を 1 個付け加えたものが 2 次元空間でした。
2 次元空間に新たな方向を 1 個付け加えたものが 3 次元空間でした。

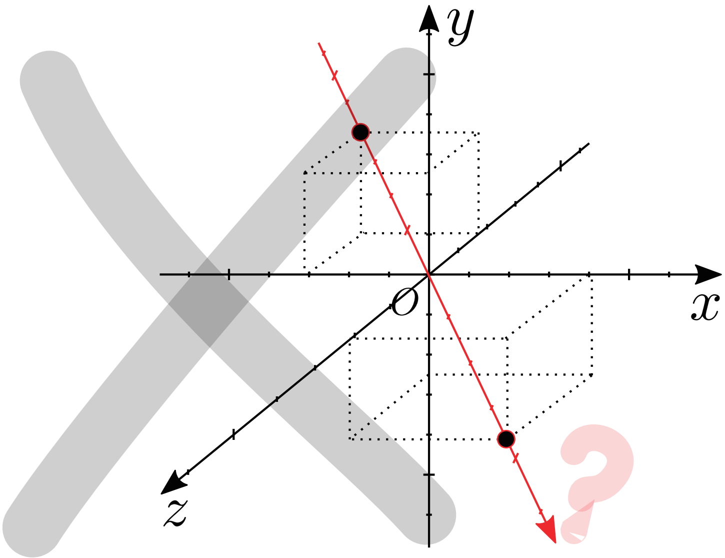
これまでの話から考えると、3 次元空間にさらにもう一つ新たな方向を付け加えることで得られる新しい空間が 4 次元空間である、ということになりますが、どのような方向を加えるのが正しいのでしょうか？

例えば 3 次元空間を表す 3 本の数直線に、図のような直線を加えるとどうでしょうか？

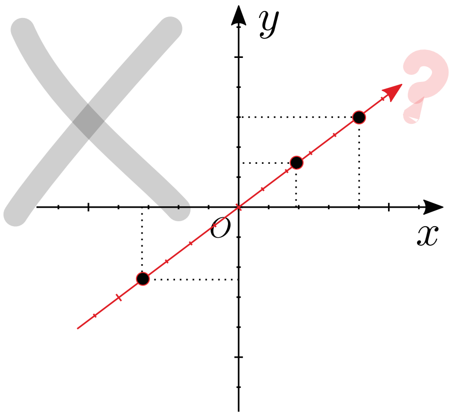


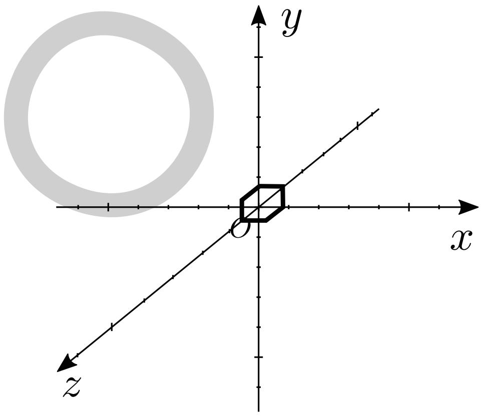
これは確かに直線を付け加えてはいますが、この直線がどのような方向に伸びていても、「新たな方向を表す直線」とは言えないのです。

なぜなら、3 次元空間内のすべての点は、既にある 3 つの直線から読み取れる座標（x 座標，y 座標，z 座標）で表すことができるので、そこにどのような直線を付け加えても、その新しく付け加えた直線上のすべての点は既にある 3 本の数直線の目盛りを読み取った座標で表現できてしまうことになります。これでは無意味な直線を付け加えたことになってしまうのです。



先ほどの 2 次元空間（平面）に新たな方向を表す直線を 1 個付け加えて 3 次元空間（空間）を作った状況を振り返ってみましょう。新しい直線として、次の左図のような、2 次元空間（平面）内に収まるような直線をもう 1 本付け加えてもやはり意味がありません。





なぜならその新しい直線上にある点の位置はすべて、既に 2 次元空間の表現として使用している 2 本の直線から読み取れる座標で表現できてしまうからです。これでは 2 次元空間（平面）に新しい方向が加わったとは言えません。そのため 2 次元空間に新しい直線を 1 個付け加えて 3 次元空間を作り出すときは、

既に 2 次元空間の表現として使用している 2 本の直線に注目します。上の右図のように、例えばこの両方に直交する直線を新たな方向を表す直線として付け加えると、この新しい直線上にある点の位置は、すでにある 2 本の直線では表現することができないということがわかります。これによって、3 次元空間を 3 本の直線で正しく表現することができるのです。

4 次元空間に話を戻しましょう。3 次元空間まではイメージができたのではないかと思います。そして先ほどの話から考えると、3 次元空間を表現する 3 本の直線全てに直交する直線を新たな方向を表す直線として付け加えることで、これが 4 次元空間を表現する 4 本目の直線となり 4 次元空間を表現することができるはずです。しかし既に気づいている人もいるかもしれませんが、そのような直線を私たちが見つけるのは、実は不可能なのです。

3 次元空間を作るときの 3 本目の直線が 2 次元空間（平面）の中に存在せず 2 次元空間（平面）の外側にあるのと同じように、4 次元空間を作るのに必要な 4 本目の直線は、3 次元空間、つまり私たちが住んでいるこの空間の中には存在せず、この空間の外側にあることになります。
「私たちの空間の外側」は、私たちが存在を認識できる世界からはみ出してしまうので、私たちには見ることができないのです。

先ほどの例にあった 4 次元ポケットの中には、存在しない（ように私たちには見える）空間が広がっています。この 4 次元ポケットの中に手を入れる方向が、4 本目の直線を置く方向だと考えることができます。しかしこれでは私たちには 4 本目の直線は見えないままなので、やはり 4 次元はよくわからないものでしかありません。

ここまではイメージと合わせて見てきたので空間をいくつかの直線の組み合わせで表現した図にこだわっていましたが、少し見方を変えることにしましょう。空間の次元は**「空間内の位置を表現するのに必要な数値の個数」**だったことを思い出してください。これは空間内の方向を表現する直線を数直線とみなして座標を読むことで空間内の位置を表現することができるというものでした。2 次元空間は 2 本の数直線で表現できるので、そこから得られる 2 個の数値（x 座標, y 座標）で空間内の位置を表現できます。3 次元空間は 3 本の数直線で表現できるので、そこから得られる 3 個の数値（x 座標, y 座標, z 座標）で空間内の位置を表現できます。

問題の 4 次元空間では、どのように 4 本目の直線が配置されているのかを私たちは確認することができず、図で描くこともできません。しかし 4 本目の直線を数直線とみなした時に得られる「数値だけ」であれば、その直線を見ることができない私たちにも簡単に取り扱うことができます。
4 個の数値の組み合わせ、つまり成分が 4 個の座標で 4 次元空間内の点の位置を表現できると考えてしまえば良いのです。

（x 座標, y 座標, z 座標, w 座標）

つまり 3 次元空間に新たに直線を付け加えるということを、3 次元空間に新たに「数値」で表現することができる要素を一つ付け加えると捉え直します。これによって得られる 4 個の数値の組み合わせで表現できるものを「4 次元空間」と呼んでいるのです。これなら成分が 4 個の座標として考えることもできるし、3 次元空間内の点を表す成分が 3 個の座標に、4 個目の数値を余分に付け加えたものとして考えることもできます。

（x 座標、y 座標、z 座標、w 座標）

3 次元空間　＋　数値

そしてこの 4 個目の数値がどのような意味を持つかということを具体的に考えて当てはめることで、4 次元空間や 4 次元という言葉を複数の意味で解釈することができるようになるのです。

・4 つ目の方向が存在する空間。

・3 次元空間に時間という要素を加えた空間。

3 次元空間 ＋ 時間

・3 次元的な映像に聴覚（音）以外の要素を加えた「4D 映画」。

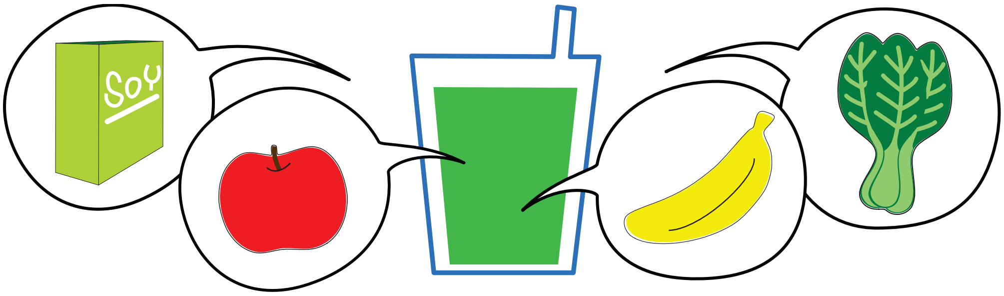
3D 映像 ＋ 振動
3D 映像 ＋ 匂い
3D 映像 ＋ 風　　など

振動や匂い、風などは、例えばその強弱を数値で表すことができますね。上記はすべて異なるものですが、4 次元空間や 4 次元、4D という共通の言葉で表現されている理由が納得できたのではないかと思います。

直線（1 次元空間）や平面（2 次元空間）にも「空間」という言葉を用いていることからもわかるように、数学において「空間」という言葉の使い方は、日常での使い方とは異なります。そのため少し複雑に感じるかもしれませんが、次元の考え方としては数値の組み合わせだけを考えれば良いという非常にシンプルなものになりました。

これはつまり 5 個の数値の組み合わせで表される空間は 5 次元と呼ぶことができ、10 個の数値の組み合わせで表される空間は 10 次元と呼ぶことができるということです。10 次元なんて想像すらできませんが、10 個の数値で表すことができるものだと考えると、すごく身近に感じますね。

みなさんが明日の朝ごはんに　りんご 100g、バナナ 50g、小松菜 50g、豆乳 100ml をミキサーで混ぜたものを飲むことを想像してください。これは 4 個の数値（りんご, バナナ, 小松菜, 豆乳）=（100g, 50g, 50g, 100ml）で表すことができます。そしてこの 4 つの数値は、値を適当に変えると味が違うスムージーを作ることができます。空間という言葉の違和感を忘れて、ただの数値の組み合わせとして考えることができるのであれば、これは 4 次元のスムージーだと言える…かもしれませんね。



第 4 章　立体の認識

先ほどの章では「次元」という言葉について考えましたが、そこで取り上げた 4 次元という言葉を日常生活で使用する機会はほとんどありません。また 1 次元は 1 本の直線で表現できるものなので非常に単純で扱いやすいという性質を持ちますが、持つことができる情報が少ないため活躍できる場面はあまり多くありません。次元という言葉の中で私たちにとって特に身近な存在なのは、やはり 2 次元（平面）的なものや 3 次元（立体）的なものではないでしょうか。実際先ほどの章でも話題に出ていたように、映画では使用される映像が 2 次元（平面）的か 3 次元（立体）的かの違いで、2D 映画・3D 映画という名前で呼び分けられていました。映画だけではなくアニメやゲームなどでもその映像に 2D や 3D のバリエーションがあることは皆さんもよく知っていると思います。

1. 映像の 2D と 3D

映画について少し考えてみると 3D 映画は立体的に「見えている」だけで、実際の映像は 2D と同様に平面的なスクリーンに映し出されたものです。ゲームやパソコン、スマートフォンなどで見ることができる 3D 映像も、同様に平面的な物に映し出された映像です。しかし逆に 2D の映像としてスクリーンに映し出された人や物を見ても、ペラペラで厚みのない平面的な物に見えているわけではありません。スクリーンに限らず紙の写真や絵などでもそこに描かれている物はちゃんと立体的な物として認識できていると思います。では 2D 映画と 3D 映画で使用されている映像は同じものなのかと言われると、決してそうは思えません。この 2 つには何かしらの明確な違いがあるはずです。ここで言う 2D と 3D には一体どのような違いがあるのでしょうか？

一言で言うと 2 次元的な情報のみを持つ映像か 3 次元的な情報を持つ映像かという違いです。2 次元的な情報のみを持つ映像では、ある 1 つの方向から対象物を観察した時にどのように見えるかという情報が平面の上に表現されています。そしてこの方法では、実際には見えていない・描かれていない部分がたくさんあるということになります。（つまり物体の裏側の見えていない部分が

どのようになっているかということや距離感などについては描かれてはいません。）それに対してここで言う 3 次元的な情報を持つ映像とは、2 次元的な情報のみを持つ映像に奥行きという情報が加えられたもののことを言います。例えば複数の方向から対象物を見た時に得られる情報を組み合わせるなどの方法で対象物の表面が空間の中のどの位置にあるかという情報を追加することで、実物と同じような立体感を持たせることができます。

簡単な例として立体画と呼ばれるものを見てみましょう。下の 2 枚並んだ写真を、目の焦点をずらすことで視界の中で重ね合わせてください。

（A）

目の焦点をずらすとは、例えば寄り目をしようとした時に見ているものが 2 つに分裂して見える状態です。そして 2 つの写真のそれぞれから分裂してきた像が互いに重なり合った時、立体的な映像が見えるはずです。このような立体画は一般にステレオグラムと呼ばれています。ステレオグラムには目の焦点を写真の奥にずらすか写真の手前にずらすかによって 2 通りの見方があります。人によってどちらが見やすいかは個人差があると思うので、それぞれ見方が異なる 2 種類の写真（A），（B）を掲載しておきます。どちらか片方は立体的に見えたでしょうか？（得意な人とそうではない人がいると思います。いまいち見方が分からないという人は「平行法」「交差法」という言葉を調べてみてください。）

（B）

（A）は 1 枚目（写真左側）を撮影した後、撮影者自身がほんの少しだけ右側にずれて 2 枚目（写真右側）を撮影したものです。（B）は（A）と同じ写真を左右逆に並べたもので、一見すると同じように見えますが、（A）も（B）も同じ写真を 2 枚並べているわけではありません。目の焦点を意図的に前後にずらして左右に並んだ 2 枚の絵を別々の目で見ている状態にすることで、空間の中で実際に立体物を見ている状態に近づき、紙の上に描かれた平面的な写真が立体的に見えるのです。

これは人間が左右の目で見ている映像にほんの少しの違いがあることを利用したものになっています。私たちの左目と右目の間には少しだけ距離があるため、左右の目で対象物を見る角度が異なります。そのため、普段から私たちの左右の目はそれぞれが（ほんの少しですが）異なる映像を見ているのです。実際、物を見る時に片目ずつ順に閉じて左右の目から見えている映像を見比べてみてください。左目と右目でほんの少し、物の見え方（位置や角度）に差があることが分かると思います。

2 次元的な情報のみを持つ平面的な映像が 1 つの方向からの情報のみを持つのに対して、ステレオグラムは 2 つの方向からの情報を持つことになります。そしてこのように、観察する方向をたった一つ増やしただけで奥行きの情報が加わり、私たちの目には「立体的」に見えてしまうのです。

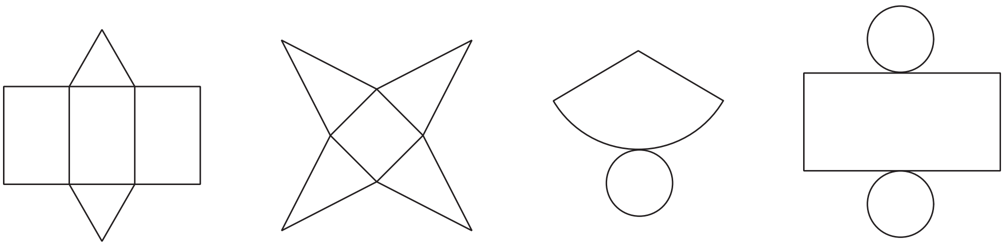
たった 1 つの情報が増えただけなのに、不思議ですよね。

参考までにまったく同じ写真を２枚並べたものを掲載しておきます。この場合は１つの方向から得られる情報のみということになるので、先ほどと同様に焦点をずらして見てください。
まるで立体感がない映像が浮き上がって見えるはずです。

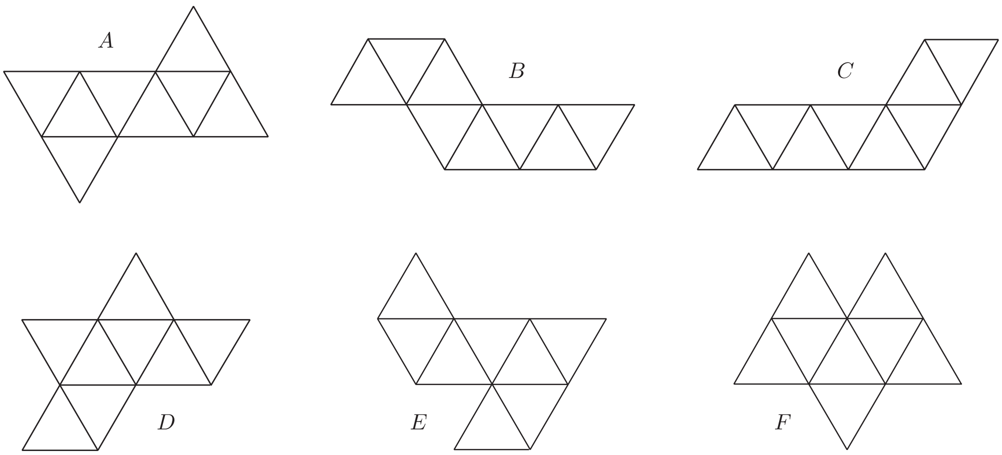
2. 複数の方向から立体を見る

立体を複数の方向から観察するということに関連した話題をもう一つ紹介します。まずは次の問題を考えてみてください。

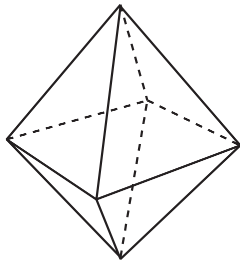
問 1. 下の各図形はどのような立体の展開図でしょうか？



問 2. 下の図形の中から正八面体の展開図を見つけてください。



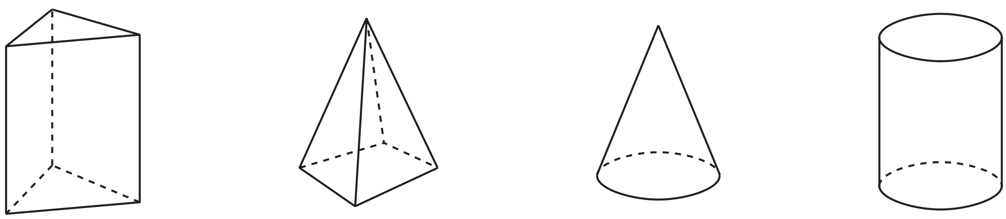
ただし「正八面体」とは右の図のような「8 枚の合同な正三角形で囲まれた立体」のことです。



みなさんは答えが分かりましたか？単純な問題ですが、
特に**問 2** に関しては難しいと感じる人も多いのではないでしょうか。

まずはこの 2 つの問いの答えを確認してみましょう。

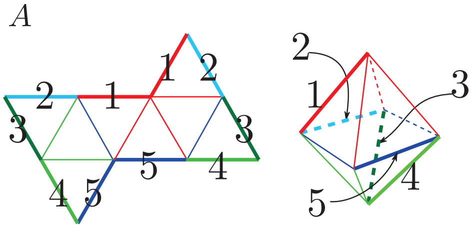
問 1.



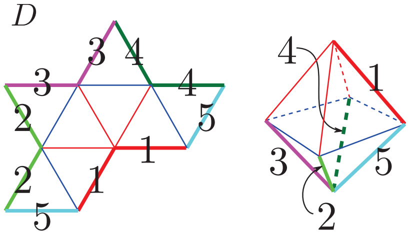
三角柱　　四角錐　　円錐　　円柱

問 2.

A



D



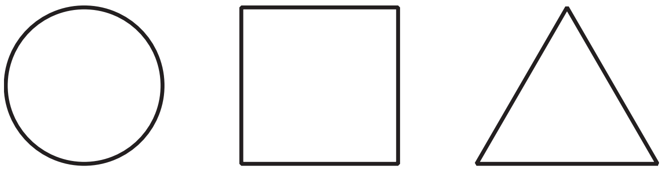
最初の**問 1** の４つの立体は、左から順に三角柱、四角錐、円錐、円柱です。これらの立体は展開図も知っているという人が多いのではないかと思います。では**問 2** はどうでしょうか？　前のページに描かれている 6 個の図のうち、A, D の 2 個が正八面体の展開図である、というのが答えです。
この図では展開図に描かれている辺が組み立てて立体にしたときにどこの位置に来るかという対応を、辺の色や辺の太さ、番号で表しています。

少し難しかったかもしれませんね。

普段、私たちは物を見る時、ある 1 つの方向のみから見ています。両目があることを考えると 2 つの方向から見ていることになりますが、見えている映像にはほとんど差がありません。そのため立体の見えていない部分がどのような形状をしているかについては、見る方向を変える必要があります。それに対して立体の展開図は、形状を確認するために複数の方向から見る必要はありません。元の立体の状態では 1 つの方向からでは見えない部分がありますが、展開図ではこのような本来は見えないはずの部分も含めた立体全体の形状を一度に確認することができます。
この差が、立体とその立体の展開図との対応をわかりにくくしているのです。

では立体を見る方向を少し増やした問題にもチャレンジしてみましょう

問 3. 上からは円、正面は正方形、横からは三角形に見えるような立体は存在するでしょうか？もし存在するなら、それはどのような形の立体ですか？



かなり難しい問題なので、簡単には形が思い浮かばないかもしれませんが、このような立体はちゃんと存在します。この章の最後のページに答えを掲載しておきますので、是非ゆっくりと考えてみてください。

そして、次が最後の問題です。

問 4. 自分の好きな立体をひとつ選び、その立体の展開図を描いてください。

ここで選ぶ「立体」は数学や算数の授業に出てくる「立体図形」でなくても構いません。家、コップ、滑り台、ラケット…　身の回りに「立体」はたくさんあります。展開図が使用されている身近な存在でもある、段ボールやギフト

ボックスなどでも良いですね。それらの「展開図」を自分で想像して描くことができるかどうかチャレンジしてみてください。

どんな立体を選んでも良いので、もちろんこの問題に関してはここで展開図の正解を示すことはできません。展開図が正しいかどうかは実際に自分が書いた展開図を組み立てることで確認してみてください。

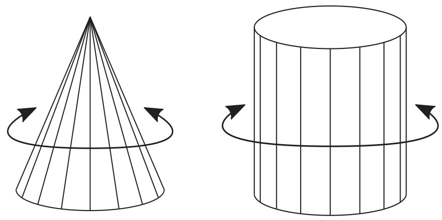
自分が思い描いていた通りの立体が出来上がりましたか？

3. 立体図形と展開図

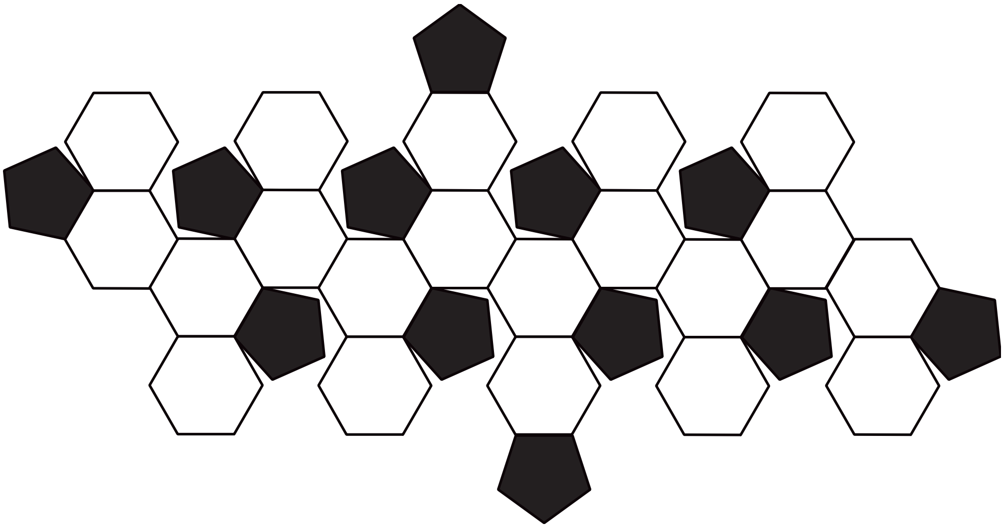
今回のように立体を適当に選び展開図を描こうとすると、展開図が非常に複雑になってしまう立体があることが分かります。それだけではなく立体の中には展開図を描くことができない物も存在します。おそらく曲面を持つ立体を選んだ人の中には、展開図を描くのに苦労した人もいたのではないかと思います。

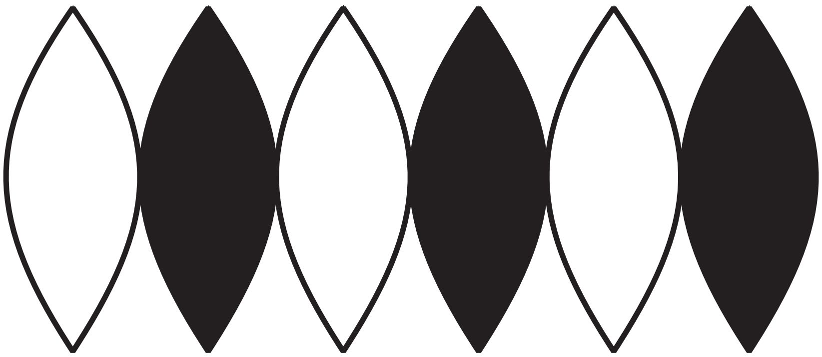
もちろん曲面を持つ立体でも円錐や円柱のように展開図を描くことができるものは存在します(問 1)。

これらは筒を作るように紙をある方向に 1 回曲げるだけの操作で作ることができます。そのためこのような立体はある 1 つの方向には曲がっていますが、別の方向には曲がらないまっすぐな線を引くことができます。



そこで、これとは異なるタイプの曲面を持つ立体の例として綺麗な球面を考えてみましょう。球面上には先ほどのような曲がらないまっすぐな線を描くことができません。球面上ではどの方向に線を描いても球面に沿って線が曲がってしまいます。つまり球面は、円錐や円柱より曲がる方向が多く、曲がり方が複雑なのです。とてもシンプルで綺麗な形ですが曲がり方という意味では少し複雑なので、実は球面の展開図は描くことができないのです。サッカーボールやビーチボールの展開図を想像した勘の良い人がいたかもしれませんが、これらは厳密には「球面」ではありません。





実際、サッカーボルやビーチボールはそれぞれ図のような展開図を組み立てて作ることができます。（ただし今は裁縫の話題ではなく数学の話題としての展開図なので、布ではなく紙に描かれた展開図を扱っているということを注意しておきます。）これを組み立てたものは球面に非常に近い形にはなりますが、角のない綺麗な球面にはならないのです。

サッカーボールは多面体なので、その各面は曲がってはいません。またビーチボールは展開図の木の葉形の部分を曲げて作るので丸みを帯びてはいますが、やはり図のようにまっすぐな線を描ける部分が残ります。

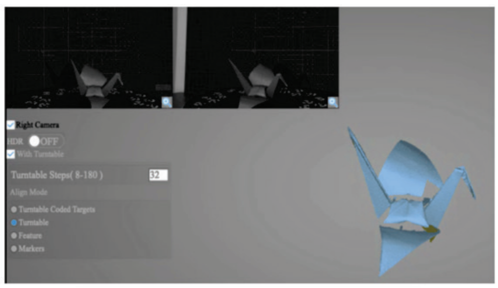
繰り返しになりますが今は数学の話題としての展開図を考えているので、伸び縮みする布やゴムのようなものに描いた展開図を組み立てて、綿や空気を入れてまん丸にするという方法は、今回はナシということにしておきます。その意味で言い直すと、球面の展開図は**紙には**描くことができないと言う方がしっくりくるかもしれません。

さて、元の話を思い出しましょう。先ほど 3 次元的な情報を持つ絵や写真の例としてステレオグラムを見ました。これは少し浮き出て立体的に見えるのは間違いありませんが、実際の立体物の凹凸を正確に表現できているわけではありません。先ほどの椅子の写真では 2 つの方向（両目）から得られる情報しか反映されておらず、椅子を横から・後ろから見たらどうなるかが分からないからです。実際の立体物の形やサイズ、奥行きなどを正確に反映させるためには、2 つの方向からだけではなくもっといろんな方向から観察して得られた情報が必要です。

4. 3D スキャンと立体図形

3D スキャン

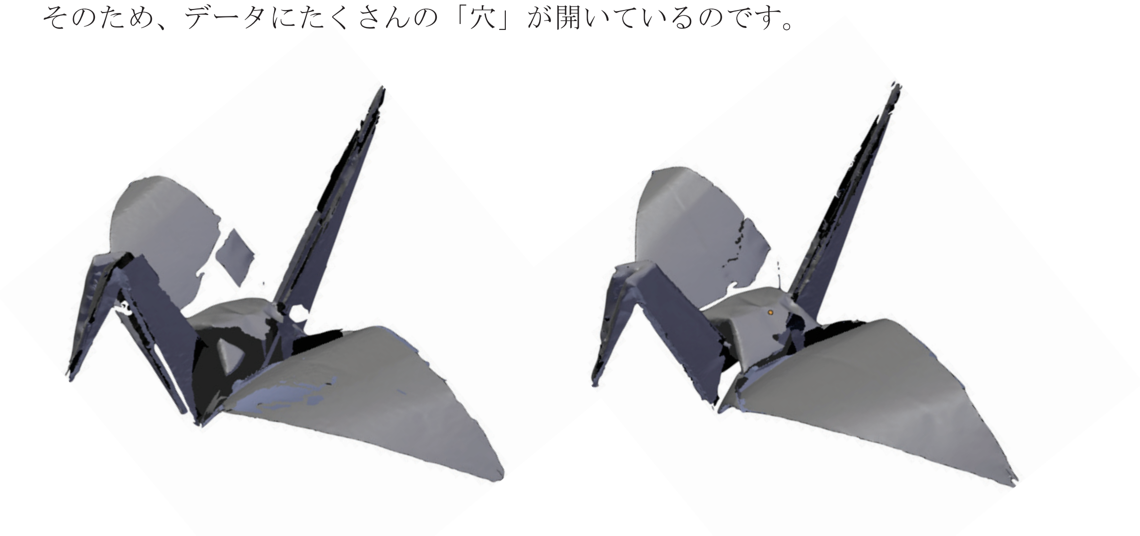
3D スキャンとは実際に存在している物体の形を 3 次元的なデータとして、パソコンに取り込むことを言います。様々な方向から物体表面をスキャンし 3D データを取得し、縦・横・高さの座標軸を持つ仮想的な空間の中に配置することで、パソコンの中に物体を再現します。これに用いられる装置は「3D スキャナ」（3 次元スキャナ）などと呼ばれています。



（SHINING 3D 社「EinScan-SP」使用）

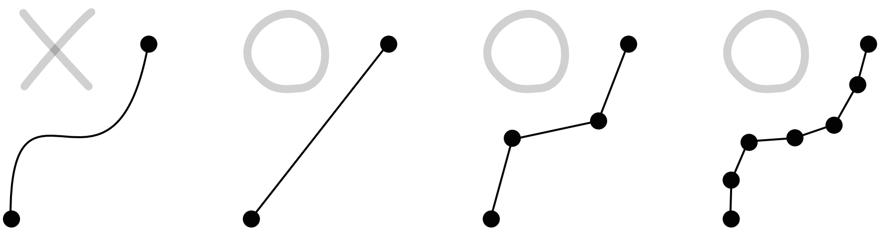
前の写真は実際に SHINING 3D 社の「EinScan-SP」を用いて、折り鶴を 3D スキャンしている様子です。

このスキャナではスキャンする物体をターンテーブルの上に置き、ターンテーブルを回しながらスキャンすることで複数の方向からの情報を取り込むことができます。ただしターンテーブルが回っている間中ずっと動画を撮り続けているというわけではなく、一周 360°をいくつかに分割し、それぞれの角度から得られたデータを組み合わせることで 3 次元的なデータが作られているのです。次の図は、一周 360°を 8 個に分割した場合（左）と、32 個に分割した場合（右）のスキャン結果です。左側のデータは右側のデータよりスキャンする角度が少なく見えない部分が多いので、得られた情報が少なくなっています。そのため、データにたくさんの「穴」が開いているのです。

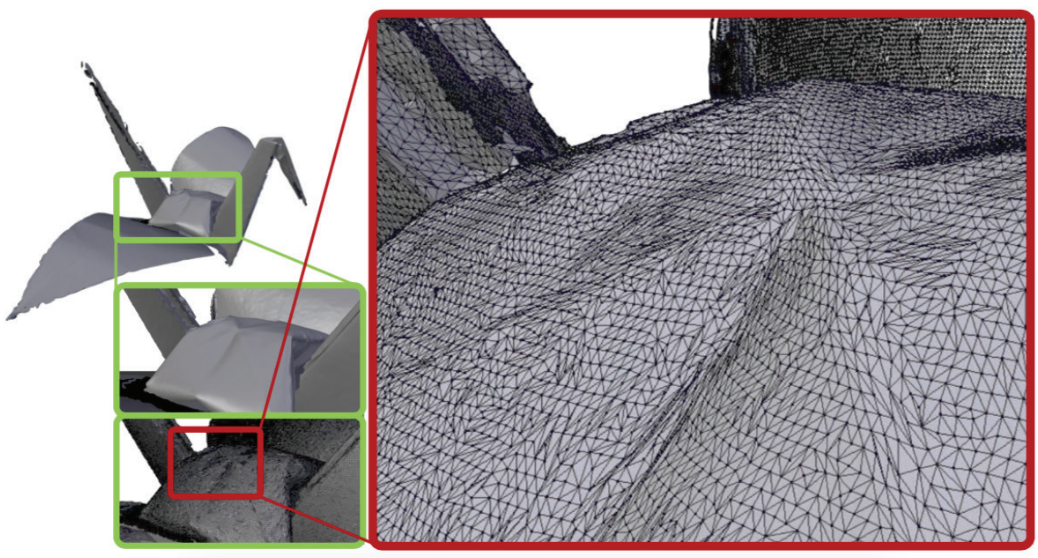


3D スキャンでは物体の表面が空間内でどのような位置にあるのかの情報をいくつかの点データとして取得します。そしてこの点データを仮想空間の中に配置し、点同士の隙間を線分や面で埋めることで、物体を多面体として表現しています。もちろん一周 360°の分割数（スキャンの角度）が多い方が、物体表面を表す点データをたくさんの方向から得ることができます。分割数が少なければその分隠れて見えない部分が多くなってしまい、その部分は物体表面の点データを取得することができません。この場合、どのように表面が繋がっているかが分からないので、取得した点データ同士を線分でつなげることができず、データに穴が空いてしまうのです。

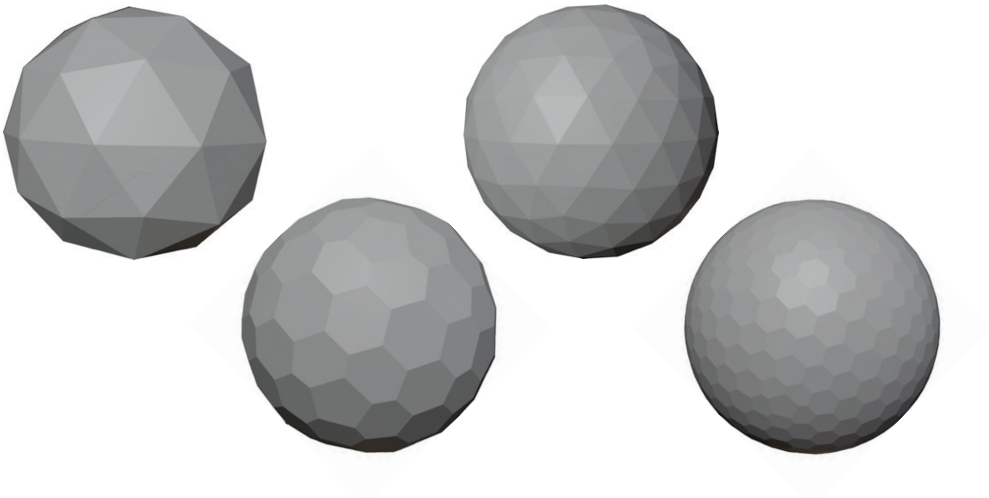
ここで一つ注意しておくと、物体表面を表す点データ同士を線でつなぐ際、曲がった線を用いることはできません。なぜなら物体の表面の曲がり具合は物体表面の点の位置を見ないと分からないからです。



繋げたい点と点の間にいくつかの点が列になっていれば、その点列を順に繋げていくことで曲がった線を表現することができますが、これには近くにある点同士を真っ直ぐな線分で繋げていく必要があります。こうすることで、スキャンした物体とよく似た形状の多面体が得られます。物体が様々な方向からどのような形に見えるのかという情報が含まれているところや、それらの形を表現するのにまっすぐな線が用いられるというところが、なんとなく展開図と似ていますね。しかし、点の個数が少ないと角だらけの多面体になってしまい、滑らかな曲面が表現できません。3D スキャンでは物体の表面の点をたくさん取ることで、実際の物体の形に近い滑らかさを持つ 3D データを作っているのです。下の図の緑枠は鶴の 3D データの、背中の部分の画像です。特に一番下は同じものを多面体として表現した図になっていますが、点の個数が多すぎてひとつひとつの点が見えません。その一部をさらに拡大したものが赤枠の画像です。非常に細かい多面体になっていることがわかると思います。

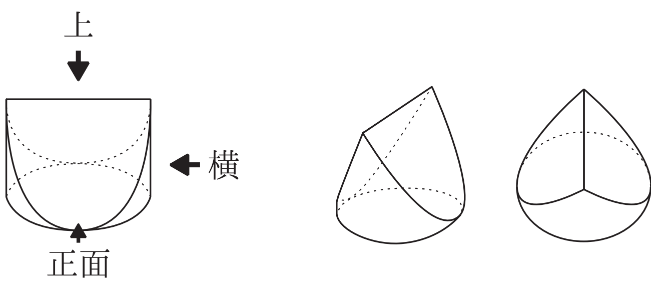


そしてこの関係は先ほどの球面とサッカーボールの関係とよく似ています。サッカーボールは多面体として展開図を描くことができますが、球面の展開図は描くことができません。このことからもわかるように、この 2 つは図形としては別物ですが、見方を変えればサッカーボール（つまり多面体）は球面に近い形を再現していると考えることもできます。サッカーボールにこだわらなければ三角形や四角形を面に持つ多面体で球面を再現することも可能ですね。球面の表面上のいくつかの点同士を繋げることでこれらの点を頂点とする、球面によく似た形の多面体が得られます。この点をなるべく多く取ることで、より球面に近い滑らかな立体を再現することができるのです。



最近では高度な技術が非常に身近なものになっており、さらにこれらの技術は日々進化しながら私たちの生活に溶け込んでいます。これらの仕組みをきちんと理解するのは決して簡単なことではありません。しかし今回のように少し見方を変えることで、普段学校で学んでいるような身近な内容と、遠い存在だと思っていた高度な技術との意外な共通点を発見することができるかもしれませんね。

問 3.　答え



索引

ひろがる数学の世界２　編集グループ

雨宮　敏子　お茶の水女子大学理系女性教育開発共同機構

加々美勝久　お茶の水女子大学理系女性教育開発共同機構

船越　　紫　奈良女子大学理系女性教育開発共同機構

若林　智美　奈良女子大学理系女性教育開発共同機構

ひろがる数学の世界 2

発行日：　2020 年 3 月 31 日

発行者：　お茶の水女子大学理系女性教育開発共同機構
〒 112-8610 東京都文京区大塚２丁目１番１号
電話　03（5978）5825
FAX 03（5978）2650
ocha-cos-office@cc.ocha.ac.jp

奈良女子大学理系女性教育開発共同機構
〒 630-8506　奈良県奈良市北魚屋東町
電話　0742（20）3266
coreofstem@cc.nara-wu.ac.jp

印刷所：　株式会社甲文堂　東京都文京区大塚 1-4-15-105
電話　03-3947-0844