ひろがる数学の世界

お茶の水女子大学
奈良女子大学
理系女性教育開発共同機構

はじめに

みなさんは、数学は授業で学んでいますが、そこでは学ばない新しい数学や数学の広がりを実感できる数学の世界もあります。本書では、数学を楽しめる副教材の作成を試みました。

この冊子は、4 章で構成し、第 1 章•第 2 章は中学生が理解でき、コンピュータサイエンスへつながるような内容です。後半の第 3 章・第 4 章は高校で学ぶ内容を広い視点から扱い、中学生でも理解できるような内容です。最後は、現代の数学の見方・考え方について知ることができ、その広がりを実感できると思います。

各章の内容の概要を示します。

○第１章　０と１の世界

デジタルコンピュータの計算方法を理解するために、二進法・二進数について考えます。

○第２章　点と線でできるグラフ

関数などで学習するグラフではなく、点と線で構成される離散グラフについて考えます。数式などを用いずに具体的な図で考察し、人間関係などもグラフに表すことができることを知り、身近な場面で数学的な見方・考え方が用いられていることを知ることができます。

○第３章　２次方程式の解について

中学校で学習する２次方程式の解を虚数まで広げ、その意味などを扱います。数を複素平面上で表すことで見えてくる性質や意味について考えます。

○第４章　ことばの大切さ・ひろがる数学

普段何気なく使っている表現について数学的な視点から考察します。章の後半は、さらにひろがる数学の世界を知ることになります。大学における数学研究や、結び目理論への位相幾何学の考え方を通して、数学そのものが持っている面白さを感じてください。

本書を読んで授業で学んでいる数学との関連や違い、広がりを知ってさらに自分で探究してもらえることを願っています。

奈良女子大学理系女性教育開発共同機構　船越　　紫
お茶の水女子大学理系女性教育開発共同機構　加々美勝久

目次

第１章　０と１の世界

ズバリ当てましょう！あなたの生まれた日

いま、私たちは、日常生活で数字や数を自由に使っています。しかし、数の表し方は長い歴史の中で様々な約束の下で確立されてきました。ここでは、現代のコンピュータサイエンスを支えている数の表し方に関連があることを考えてみましょう。

1.　カードの色がわかれば誕生日が分かる！

次のようなゲームを考えてみましょう。

「青（B)、緑（G)、黄（Y)、橙（O)、紫（P) の５枚のカードに数字が書かれています。あなたの生まれた月日が書かれたカードの色を教えてください。」

B

16	28	23	29
31	21	30	25
24	18	22	17
27	19	26	20

G

12	31	30	8
25	13	9	26
24	10	14	27
11	29	28	15

Y

12	28	29	7
21	13	6	22
20	5	14	23
4	31	30	15

O

7	30	31	10
19	6	11	22
18	14	3	23
15	26	27	2

P

1	23	19	9
21	3	11	27
31	13	5	17
15	29	25	7

Q「生まれた月が書かれているカードの色をすべて教えてください。」

A「ハイ，緑Ｇと橙Ｏと紫Ｐです」

Q「次に生まれた日が書かれているカードの色をすべて教えてください。」

A「ハイ，青Ｂと紫Ｐです」

「ありがとうございます。月が「ＧとＯとP」ですね。日は、「ＢとP」ですね。ハイ！わかりました。誕生日は、11 月 17 日ですね。」

どうして、このようにわかるのでしょうか。

2.　カードのひみつ？

さて、はじめに見た 5 枚のカードにはちょっとした仕掛けがあります。これらのカードは数字がバラバラに書かれていますが、それぞれのカードの数字を小さい方から順番に並べてみましょう。

どうなりましたか？

B

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

G

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

Y

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

O

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

P

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

このように数字を並べると、カードに書かれている数の特徴が見えてきます。どうでしょうか。

カードの左上の位置に書かれている数字が、そのカードに書かれている数では、一番小さい数になっています。16，8，4，2，1 です。青以外のカードは連続した数になってはいませんね。それぞれのカードに書かれている数にはどんな特徴があるのでしょうか。

たとえば「11」があるカードは緑, 橙, 紫の 3 枚のカードですね。これらのカードの左上の数は、8，2，1 です。この 3 つの数を足すと 8 ＋ 2 ＋ 1 で 11 になります。「17」があるカードはどうですか。青、紫の 2 枚のカードですね。同じように左上の数を見て足すと、16 ＋ 1 で 17 になります。

では、9 月 18 日はどうでしょうか。「9」があるカードは緑と紫、左上の数が、8 と 1 これを足して 9。「18」があるカードは青、橙、左上の数が、16，2，同じく足して、18 ですね。この左上に書かれている数、16，8，4，2，1 にヒントがありそうです。

5 枚のカードについて、そのカードを選んだときには 1 を、選ばなかったときには 0 をそれぞれの左上の数に掛けて足してみます。 たとえば 13 では、16 × 0 ＋ 8 × 1 ＋ 4 × 1 ＋ 2 × 0 ＋ 1 × 1 ＝ 13 となります。また 20 は、16 × 1 ＋ 8 × 0 ＋ 4 × 1 ＋ 2 × 0 ＋ 1 × 0 ＝ 20 となります。このとき、掛けられる数は左から順に 16，8，4，2，1，と決まっています。そこで、掛ける数の 0 か 1 だけを取り出して、左から「01101」と書いて 13 を表し、同じように考えると 20 は 16 ＋ 4 で「10100」となりますね。このように 0，1 の意味を約束すると、カードを選ぶことと、選んだカードの左上の数字を足すことを同時に表していることになります。では、16，8，4，2，1 を組み合わせて足し合わせることで、どのような数を表すことが出来るのでしょうか。丁寧に見てみましょう。

3.　数の表し方　位取り記数法

2．で見たカードの秘密をもう少し丁寧に見て見ると、掛けられる数字を、16，8，4，2，1 として掛ける数字は 0 か 1 でそれらの和を考えます。
次のような表で考えてみましょう。

表１では、カードの色と、そのカードを選んだときに掛けられる数が書かれています。その下の欄にはカードを選んだときには 1 を、選ばなかったときには 0 を掛けるように、1 と 0 が書き込まれています。

この表を見るとどんなことが分かるでしょうか。

16，8，4，2，1 を組み合わせて足すことで、0 から 31 までの 32 個の数を表すことが出来ていますね。さらに、0 と 1 の関係を見ると、一番右は、表の上からいつも 0，1 が交互に出てきて、偶数の時は 0、奇数の時は 1 ですね。右から 2 つめを見ると、右端が 0 から 1 になる時には変わりませんが、1 から 0 になるときには、元の数の右から 2 桁目が 0 の時は 1 へ、1 の時は 0 へ変わっています。他の欄も見て見ると、どこも表の上から順に見ると 1 から 0 になる毎に左の欄の 0 と 1 が変わっています。これは普段使っている数の表し方で、9 の次が 10 になるのと同じ変わり方、すなわち、繰り上がりの考えが使われているようです。この表し方だと 1 の次（＋ 1）は 10，1 ＋ 1 ＝ 10 と表すことが出来ます。もう一度表１を見てみましょう。1 を足すと、もともと 1 があるところでは、次々に左を 0 にして「繰り上がって」いき、0 だったところを 1 にして「繰り上がり」は終わりになります。確認してみてください。

表１では、31 までを 0 と 1 だけで表すことが出来ることが分かりました。

表 1

カードの色と掛けられる数	青 16	緑 8	黄 4	橙 2	紫 1	1,0 を並べると	和
掛ける 0 と 1	0	0	0	0	0	00000	0
	0	0	0	0	1	00001	1
	0	0	0	1	0	00010	2
	0	0	0	1	1	00011	3
	0	0	1	0	0	00100	4
	0	0	1	0	1	00101	5
	0	0	1	1	0	00110	6
	0	0	1	1	1	00111	7
	0	1	0	0	0	01000	8
	0	1	0	0	1	01001	9
	0	1	0	1	0	01010	10
	0	1	0	1	1	01011	11
	0	1	1	0	0	01100	12
	0	1	1	0	1	01101	13
	0	1	1	1	0	01110	14
	0	1	1	1	1	01111	15
	1	0	0	0	0	10000	16
	1	0	0	0	1	10001	17
	1	0	0	1	0	10010	18
	1	0	0	1	1	10011	19
	1	0	1	0	0	10100	20
	1	0	1	0	1	10101	21
	1	0	1	1	0	10110	22
	1	0	1	1	1	10111	23
	1	1	0	0	0	11000	24
	1	1	0	0	1	11001	25
	1	1	0	1	0	11010	26
	1	1	0	1	1	11011	27
	1	1	1	0	0	11100	28
	1	1	1	0	1	11101	29
	1	1	1	1	0	11110	30
	1	1	1	1	1	11111	31

「これは便利！」と思いますか。31と書けば良いところを5つも1を使うなんて「書くのが大変だ」と思いますか。

では、0と1だけで数を表す方法の特徴を考えてみましょう。まず私たちがいつも使っている数の表し方では、数字は、0，1，2，3，4，5，6，7，8，9の十種類必要ですが、**表１**のような表し方では0と1の二種類の数字があれば整数は表すことが出来そうですね。そういった意味では、「超エコ表記」であることがわかります。これまで普通に書いてきた数字、たとえば2304はどんな約束になっているかというと、

$$
\begin{aligned}
&2304\\
&= 2000 + 300 + 4\\
&= 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4\\
&= 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 4 \times 1
\end{aligned}
$$

と、数字を書いた位置で1000，100，10，1と掛ける数が決まっているのでした。これを右から一の位、十の位、百の位、千の位として理解しているわけです。右の桁の10倍になるごとに左にずらして書いています。また1000は10の3乗、100は10の2乗、10は10の1乗、1は10の0乗と考えて良いですね。

この考え方を**表１**で見てみると、16は2の4乗、8は2の3乗、4は2の2乗、2は2の1乗、さらに1は2の0乗になっていると考えられます。元になっている数が、10か2かの違いだけで、全く同じように数を表すことができることが分かります。

すなわち、0と1で表す数の世界と、0～9までの数字を使って表す世界は、

$$10111 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 1 = 23$$

とすることで、1と0だけで表された数をふだん使い慣れた形に直すことが出来ます。このように、数字を書く位置によって「何の位」というように決まっている書き方を、位取り記数法と言います。この位取り記数法によってふだん私たちが10をひとまとまりと考えて使っている数の表し方を十進法といって、これで表される数を十進数といいます。

全く同じように、2をひとまとまりと考える数の表し方を二進法といって、これで表される数を二進数といい、$10111_{(2)}$　のように右下に小さく(2)を書いて二進数であることをはっきりさせます*⁾。読み方は左から数字をそのまま読

みます。$10111_{(2)}$ は「イチ ゼロ（レイ）イチ イチ イチ」で「一万百十一」などと読んではいけません。十進数で 23 です。

*)　$10111_{(二)}$ と書く書き方もある。

練習１　月が Y，O のカードに、日が B，G，P のカードにある人は、何月何日生まれでしょうか。

練習２　次の二進数を十進数で表しなさい。

(1) $11_{(2)}$　　(2) $110_{(2)}$　　(3) $1001_{(2)}$　　(4) $1101_{(2)}$

4.　十進数を簡単に二進数へ

ここでは、十進数を簡単に二進数に表す方法を考えます。

十進数も 321 と書いたときに、$321 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$ ですね。このように表すときにはもとの数を、10 で割って余りを求め、順に一の位から書いています。すなわち

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
10 \,) & \underline{321} \\
10 \,) & \underline{\ \ 32} \cdots 1 \\
10 \,) & \underline{\ \ \ \ 3} \cdots 2 \\
 & \ \ \ \ 0 \cdots 3
\end{array}
$$

のように、商が 0 になったところで　321 と下の数字から上に順に左から右へ書くことになります。

十進数を二進数に表す方法は、この割る数を 2 にして、同じようにします。

十進数の 24 を二進数で表してみましょう。すぐにわかりますが、2 で割った余りは 0 か 1 しかありませんね。すぐに二進数で表せます。

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
2 \,) & \underline{24} \\
2 \,) & \underline{12} \cdots 0 \\
2 \,) & \underline{\ \ 6} \cdots 0 \\
2 \,) & \underline{\ \ 3} \cdots 0 \\
2 \,) & \underline{\ \ 1} \cdots 1 \\
 & \ \ 0 \cdots 1
\end{array}
$$

このようにすると　$24=11000_{(2)}$ となります。

これで、二進法、十進法どちらの方法でも数を表すことが出来ます。

練習３ 次の数を二進数で表しなさい。

(1) 6　　(2) 9　　(3) 15　　(4) 64

次のセクションでは、二進数で表すことがどんなよさがあるのかを見てみましょう。

5. コンピュータと二進数

突然ですが、皆さんは、コンピュータを動作させるためには、電気が必要なことはよく知っていますね。何を今更と言わないでください。電気は何をするために使っているか知っていますか。もちろん、モニタ画面に表示するためなどもありますが、コンピュータ本体が「計算」するために必要です。計算と聞いてもピンと来ないかもしれませんが、コンピュータの作業は、コンピュータの頭脳のＣＰＵ（中央演算処理装置）で電気の力で「計算」をしています。「コンピュータ　電気無ければ　ただの箱」と言われるわけです。さて、その計算は私たちが算数で習ったような、3 ＋ 5 ＝ 8 というようにしているのではありません。前のセクションでやった二進数を使って計算しています。すなわち $11_{(2)} + 101_{(2)} = 1000_{(2)}$　などとなります。なぜこのような形で計算をするかと言いますと、電気が流れたか切れたかで計算をするからです。ここではその仕組みを詳しくは扱いませんが、「1」を電気が流れた状態（スイッチをオン)、「0」を電気が切れた状態 (スイッチをオフ) を表すことにすると、コンピュータの計算と相性がとてもよくなります。桁数は多くなるように見えますがコンピュータのスイッチのオン・オフの切り替えによる計算はコンピュータでは得意なのです。このようなコンピュータをデジタルコンピュータと言いますが、ここでは単にコンピュータと呼びます。よくパソコン（パーソナルコンピュータ）の性能表に、「クロック周波数 1.8GHz」等（2018 年頃のノートパソコンの例）と書かれていますが、これは理論上 1 秒間に 1.8×10^{9}（18 億）回スイッチのオン・オフで 0･1 の足し算ができるということです。

ここまで見てきたようにコンピュータで計算するには二進数にして計算することで非常に高速に計算できるよさがあります。

6.　二進数の計算 (1)　0・1 の 加法

では実際に、二進数の計算方法について見てみましょう。
まず $1_{(2)}+0_{(2)}=1_{(2)}$ これは大丈夫ですね。もちろん $0_{(2)}+1_{(2)}=1_{(2)}$ です。さて、$1_{(2)}+1_{(2)}$ はどうでしょうか。表 1 を思い出してください。$10_{(2)}$ になります。すなわち、1 の次は「繰り上がり」が起こります。式で書くと　$1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$ です。次々に 1 を足していくと、$10_{(2)}+1_{(2)}=11_{(2)}$　と 0 に 1 を足してもそのままです。$11_{(2)}+1_{(2)}=100_{(2)}$ と順に繰り上がりが起こります。

練習 4 次の二進数の計算をしなさい。

(1)　$10_{(2)}+1_{(2)}$　　(2) $11_{(2)}+1_{(2)}$

(3) $110_{(2)}+11_{(2)}$　　(4) $101_{(2)}+1110_{(2)}$

7.　二進数の計算 (2)　2 の補数を用いた減法

ここでは、引き算を加法によって行うことを考えます。なぜこのような考え方をするかというと、コンピュータで計算を行うときには、ソロバンのように、限られた桁数で加法だけで行うことで高速に計算できるからです。ここでは、ある二進数に対して、**2 の補数**という考え方を使います。

2 の補数：左にある 0 も表記するm桁の二進数に対して、足して十進数 2^m になる二進数のこと

例　4 桁で考えると $111_{(2)}$ は $0111_{(2)}$ と表します。
$0111_{(2)}+x=10000_{(2)}$　から　$x=1001_{(2)}$　となります。

すなわち $0111_{(2)}$ の補数は $1001_{(2)}$　になります。この補数の考え方を用いることで、「引き算」を加法になおせます。コンピュータの内部でおこなう引き算を加法のみで行う方法を見てみましょう。

例　$1101_{(2)}-0111_{(2)}$ について考えます。二進数の 4 桁のみで考えるとき、桁をはっきりさせるために枠を付けて表します。

$$\boxed{1|1|0|1} - \boxed{0|1|1|1} = \boxed{1|1|0|1} + \boxed{1|0|0|1}$$

$$= 1\boxed{0|1|1|0}$$

と二進法で 5 桁の数になりますが、枠が 4 桁しかないので、一番左の 1 は無視

して、右の 4 桁 $0110_{(2)}$ ＝６が求める答えです。

すなわち、13 － 7 ＝ 6 を行っています。

どうですか。考え方が分かりましたか。

引く数の補数を簡単に求める方法は、「1 と 0 を入れ替えた数に 1 を足す」と求められます。このように 1 と 0 を入れ替えることを、「反転させる」とも言います。すなわち、「各桁の数を反転させて 1 を足す」ことで求められます。

注：このように表したときに、1・0 が入る枠のことをビット と言ってこの例では、4 ビットの数といいます。コンピュータで数を表すときには、0 から 9 までと、A から F までを使い、10 が A，15 が F となります。4 ビットの最大数が F です。

練習５　次の 4 桁の二進数の計算を加法でしなさい。

(1)　$0011_{(2)} - 0011_{(2)}$　　(2)　$0101_{(2)} - 0011_{(2)}$

(3)　$1101_{(2)} - 0011_{(2)}$　　(4)　$1001_{(2)} - 0111_{(2)}$

8.　発展的にさらに０・１の世界を考える

ここでは、自然数と加法について考えてきましたが、負の数や小数の表し方なども調べてみましょう。また、コンピュータ内部の計算は、非常に高速で計算できるので、基本的には加法しか行いませんが、二進法でのかけ算や割り算の方法についても、自分で考えて見ましょう。

これまで考えてきたことで、0 と 1 の 2 つの数字があればどんな自然数も表せること、表す桁数が決まっているときには、補数の考え方を使えば引き算を加法でできることがわかりました。

コンピュータが扱えるものは、すべて 0 と 1 で表された数値だけです。パソコンやスマホはすべてこのような計算を行っています。このように 0・1 で情報を表すことを「デジタル化する」、あらわされた情報を「デジタル情報」などと言います。コンピュータはデジタル化されたものしか扱うことが出来ません。世の中の事象をコンピュータで処理するためには、デジタル化する必要があります。音も色も映像もデジタル化されてはじめてコンピュータ上で表現することが出来ます。基本的にコンピュータは、計算機械です。そのための研究も盛んに行われています。

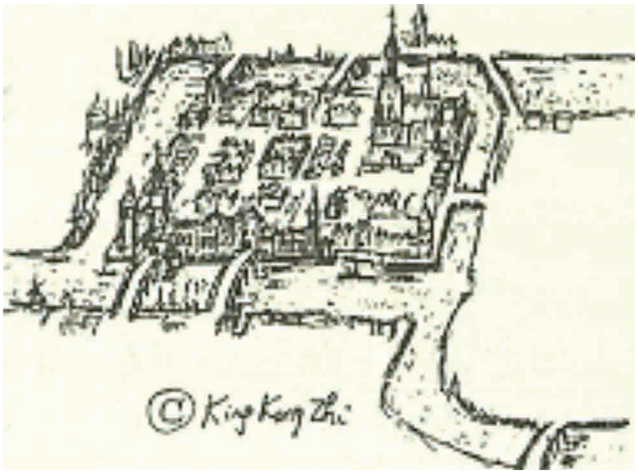
これからの社会は、Society5.0 の時代とか「超スマート社会」と言われる時代

になっていきます。あらゆるものがコンピュータネットワークでつながり (IoT)、ますますコンピュータの存在を考えなくても使える社会になっていきます。そのような社会で、コンピュータの機能を知ってどう関わっていくかを考えることも大切ですね。

［練習の解答］

練習 1	月 8+4=12	日 16+8+1=25	12 月 25 日生まれ	
練習 2	(1) 3	(2) 6	(3) 9	(4) 13
練習 3	(1) $110_{(2)}$	(2) $1001_{(2)}$	(3) $1111_{(2)}$	(4) $1000000_{(2)}$
練習 4	(1) $11_{(2)}$	(2) $100_{(2)}$	(3) $1001_{(2)}$	(4) $10011_{(2)}$
練習 5	(1) $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$	(2) $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$	(3) $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$	(4) $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$

第２章　点と線でできるグラフ



左の図は、現在カリーニングラード（ロシア連邦カリーニングラード州州都）と呼ばれていますが、かつてのプロイセン時代には「ケーニヒスベルク」と呼ばれていた都市を流れる川に囲まれた中州とそこに架かる７つの橋を表した図です。

この場所では、「この７つの橋を一度しか通らないですべて渡りきることができるか」という問題があったそうです。多くの人たちが実際に渡って探そうとしても、どうしても出来ませんでした。これを、数学者のオイラー*) は渡りきることが出来ないことを証明したと伝わっています。

実はこの問題が新しいタイプの数学「点と線で考える数学」（18 世紀に誕生）につながっています [1]。

ここでは、この橋渡りの問題を考えるためにも、点と線のつながりを考えて広がる数学の世界をみてみましょう。「これも数学なの？」「こんな所にも数学的に考えることができるんだ」等と思えるところがあれば良いと思います。また、「数学的な見方・考え方」をするときに、本当はきちんと証明した方が良いところもありますが、この本では、まず広がった数学の世界でどのようなことが考えられ, どのような性質が成り立つのかを、直感的に捉えてもらえれば良いです。

*) オイラー：1707-83　スイス生まれの 18 世紀を代表する数学者。現在使われている数学の表記法についてもオイラーに負うところが大である。（出典：岩波数学入門辞典 2005 岩波書店）

１．グラフの考え方

これまでに「棒グラフ」や「折れ線グラフ」、また「比例・反比例のグラフ」のような関数のグラフなどを見たりかいたりしてきました。これから考える「グラフ」は平面上で「点と線でできた図形」のことを「グラフ」といいます。ちょっ

と頭を切り換えてください。たとえば、図 1 も図 2 も図 3 も
「グラフ」です。図 3 は「樹形図」等を作るときに現れる形ですね。やはり「木」のイメージがあります。


図１

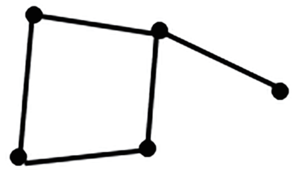


図２

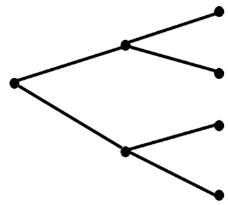


図３

図 4 や図 5 も「グラフ」です。

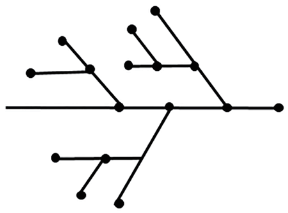


図４

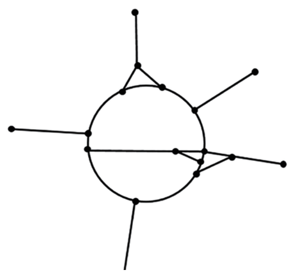


図５

図 4 は魚の骨の形に似ているので、「フィッシュボーン図」などと呼ばれることもあり、ものごとの思考ツールとしてこのような図が使われることがあります。図 5 は東京 23 区内を走る JR 東日本の鉄道路線図をイメージしたものです。路線図もこのように駅（点）と線路のつながりの関係さえ分かれば、乗り換えをして目的地に行くことが出来ます。点の駅名がわかりますか。

これからは点 ● を頂点、2 つの頂点を結ぶ線を辺と呼びます。辺は曲線でもかまいません。

頂点のつながり方がわかれば良いので、重ならなければ、辺は線分で簡単に書くことにします。必要に応じて、曲線も使います。

したがって、図 6 のグラフは図 3 のグラフと同じものです。

図 7 と図 8 も見た目は違いますが、グラフとして頂点と辺の関係はどちらも同じものです。

図６

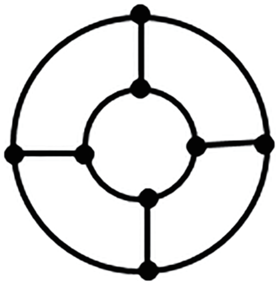


図７

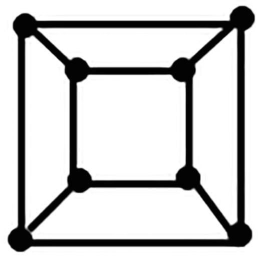


図８

頂点と辺のつながり方が同じならば、辺の長さや形は無視します。さらに、頂点以外で辺が交わっていても、「グラフ」としては意味が無いので、無視します。

したがって次の 3 つの図 9、図 10、図 11 はすべて同じグラフです。

頂点の名前と辺のつながりを確かめてください。

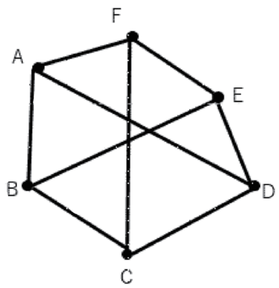


図９

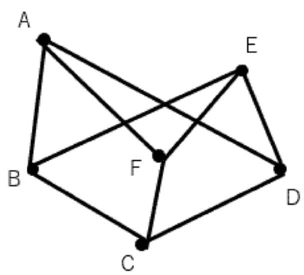


図 10

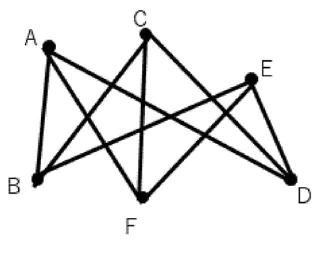


図 11

参考：GeoGebra などの作図ソフトで、はじめに図 9 の頂点と辺を描画して、頂点 F を移動して、次に頂点 C を移動させると図 11 になります。このようにグラフを切ることなく変化させてみると、同じであることが簡単にわかります。このようにしていろいろ変形してみてください。

ここでちょっと「数学的」に考えて見ます。図１から図 8 までは頂点以外では辺が交わっていないグラフです。この中に、頂点を結んだ辺で囲まれる部分を面と呼びます。グラフの書かれている部分も面です。図１は面は１つ、図２は囲まれた四角い面と外側で面は２つ。

練習１　　図４、図５、図６の面はそれぞれいくつですか。

解答　　図４　1　　図５　6　　図６　1

「グラフ」の見方に慣れてきましたか。

このようなグラフ（これからは「」で囲みません）を考えると、いろいろな関係や構造を簡単にわかりやすく表すことが出来ます。どんな世界が広がっているか、これから見ていきましょう。

では、図 4，図 5、図 6 をさらに見てみましょう。それぞれの頂点の個数、辺の本数を表にしてみます。

表１

	図４	図５	図６
頂点	18	17	7
辺	17	21	6
面	1	6	1

この表１の頂点、辺、面の数値の関係を眺めてみてください。足したり引いたりすることで、あるきまった値になることが分かります。

ちょっと考えて見てください。気がつきましたか。

図 4 では 18 － 17 ＋ 1 ＝ 2

図 5 では 17 － 21 ＋ 6 ＝ 2

図 6 では 7 － 6 ＋ 1 ＝ 2

すなわち、(頂点) －（辺）＋（面）＝ 2 となっています。この関係をオイラーの多面体定理と言います。

これは立体図形でも成り立つ関係です。自分で多面体を調べてみてください。

ところで、グラフで、すべての頂点に来ている辺の合計の本数は必ず偶数になっています。握手の定理と呼ばれることもある定理です。次のように考えます。

パーティーの参加者を頂点とみて，パーティー中に握手をした 2 人の間を辺で結んだグラフを考えると参加者全員の握手回数の合計が偶数になることから来ています。

２．グラフを使って考えると

前項では、点と線でできた図形をグラフと呼び、見方のポイントを学んできました。ここでは人間関係をグラフで表し、課題を解決する様子を見ましょう。

いま、モエさん、マリさん、ミウさん、ナオさん、ユキさん、サチさんの女子６人の人間関係で仲良し関係は次のようになっています。仲良しとはお互いに良い関係になっているとします。

モエさんはマリさん、ミウさん、ナオさんと仲良し。マリさんはミウさん、ユキさんと仲良し。ミウさんはモエさん、マリさん、ユキさんと仲良し。ナオさんはモエさんと仲良し。ユキさんは、マリさん、ミウさん、と仲良しです。

あなたがプロデューサーになってこの中から仲良し 3 人組のユニットを作ってデビューさせることになりました。デビューできるユニットの可能性は幾つあるでしょうか。

この仲良し関係からすぐにはどんな 3 人組のユニットがつくれるかはわかりにくいでしょう。

これを考える方法として、まず表を作って整理することが考えられます。表２を作って見ましょう。○が書かれている関係はお互いに仲良しで、空欄は仲良しではないとします。大分見やすくなりましたね。この表２からすぐにどの 3 人でユニットを組めば良いか分かりますか。

表２

	モエ	マリ	ミウ	ナオ	ユキ
モエ	*	○	○	○	
マリ	○	*	○		○
ミウ	○	○	*		○
ナオ	○			*	
ユキ		○	○		*

どの 3 人を選べば仲良しユニットになるかはもう少し整理する必要があります。

そこで、それぞれの人を点で表し、仲良し関係を線で結ぶと図 12 のようなグラフが出来ます。

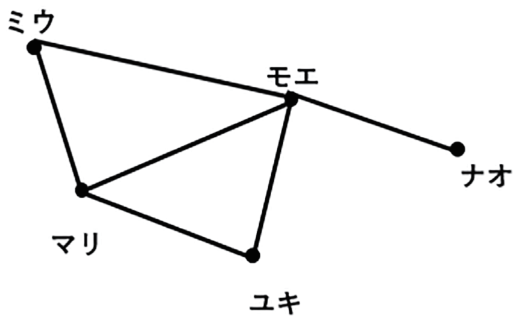


図 12

この図 12 を見ると、3 人組のユニットは、三角形をつくる 3 人を選べば良いことがすぐにわかります。

これから図 13、図 14 のような 2 つの三角形を作り出すことが出来ます。すなわち、モエ・マリ・ユキの MMY と、モエ・マリ・ミウの 3 M の 2 つのユニットを作ることが出来ます。

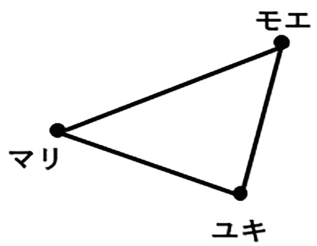


図 13

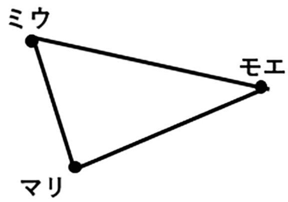


図 14

モエとマリは両方のユニットのメンバーなので、デビューはどちらかの組み合わせでしょう。でも、組み合わせは 2 種類できることがすぐにわかります。

このように人間関係もグラフとして表すことができます。

グラフが持つ性質などを考えたり見つけたりしますが、ここでは厳密な証明はしません。もしきちんと証明をしないと気持ちが悪いという人は、参考資料の専門書でたしかめてください。

３. 一筆書き

さて、はじめに提起したケーニヒスベルクの町の 7 つの橋渡りの問題ですが、真上から見ると、島と橋の関係はおよそ図 15 のようになっています。

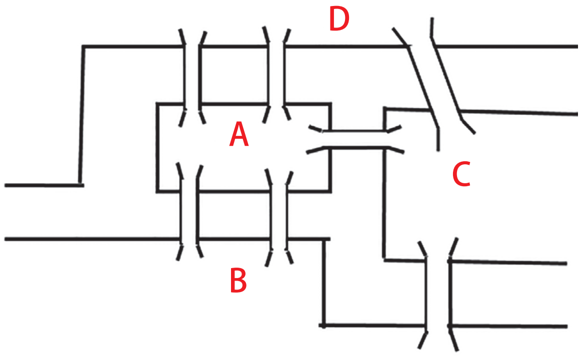


図 15

すなわち、「すべての橋を一度ずつ渡って A から D の 4 つの島をまわりきることができるか。」という問題になります。

このときに、島をA, B, C, Dの点とし、橋を線で表すと、図 16 のようになります

この点と線でできた図 16 は、これまで見てきたグラフとは少し違います。1 つの頂点から複数の辺が出ています。見方は同じなので、考えて見ましょう。

この橋渡りの問題は、「鉛筆を紙から離すことなく、すべての辺を 1 度だけ通って、A，B，C，Dすべての点を廻ることができるか？」という問題になります。

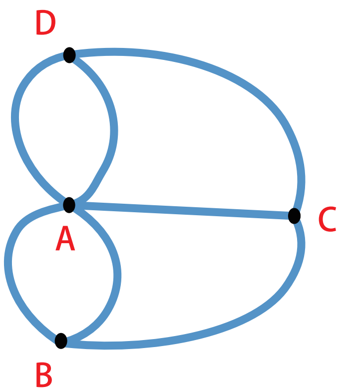


図 16

この考え方は、これまで遊んだ事のある「一筆書きができるか」という問題が数学的に考えるモデルになりましたね。

それでは、次の 6 つの図で一筆書きができるものはどれでしょうか。

図 17

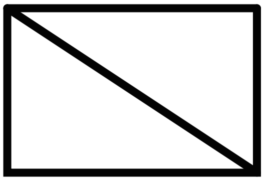


図 18

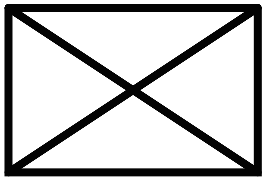


図 19

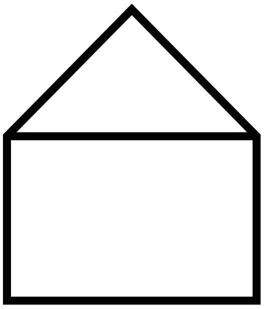


図 20

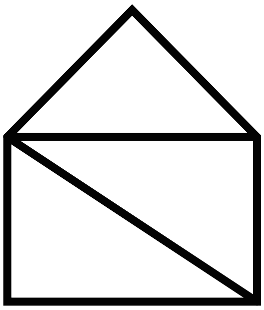


図 21

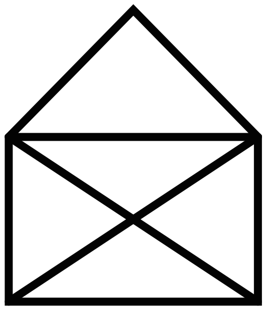


図 22

図 19 以外はどれも一筆書きができます。

これらの図を、数学的な見方で考えて見ます。ここでは、多角形としての頂点と線の交点もこれまで考えてきた、頂点として考えます。このとき頂点を通る辺の数を偶数本か奇数本かで分類してみます。そこで、辺が偶数本通っている頂点を「偶点」、辺が奇数本通っている頂点を「奇点」と呼びます。上の 6 つの図形の偶点と奇点の個数を数えてみます。また、一筆書きが出来たときのスタート地点とゴール地点が同じかどうかなども表にしてみましょう。

表 3

	偶点の数	奇点の数	スタートとゴール
図 17	2	0	同じ
図 18	2	2	違う
図 19	1	4	できない
図 20	3	2	違う
図 21	5	0	同じ
図 22	4	2	ちがう

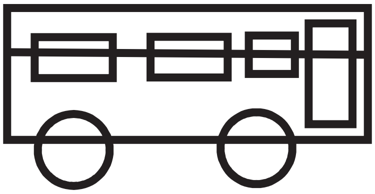
表 3 から、偶点の数と奇点の数と一筆書きができるか、スタートとゴールの場所が同じか違うかについての関係を読み取ってみると、一筆書きが出来ると

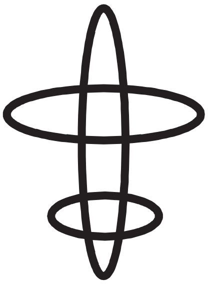
きは、偶点の個数に関わりなく、奇点の数が 2 か 0 であることがわかります。これから、**辺がつながっているグラフは、すべての頂点が偶点か、奇点の個数が２か０であれば一筆書きができる**と予想できます。

では、次の 2 つの図は一筆書きが出来ますか。

スタートとゴールはどこになりますか。

それぞれ見た途端に判断できるでしょう。





ここまでで分かったように、一筆書きも数学的な見方をすることができることが分かりました。

４．グラフの考え方と日常生活

2019年（平成31年）1月7日（月曜日）

ごみ、IoTで省力回収

収集車にGPSやセンサー

量やルート分析

環境省、春から実験

環境省は家庭などから出る一般ごみの収集を、あらゆるモノがネットにつながるIoTなどの情報通信技術を使って効率化する取り組みを2019年度から始める。ごみ収集車に全地球測位システム（GPS）やセンサーを取り付けて、経路や回収量を定量的に分析。効率よく短時間で収集できるようにする。省エネ型の収集システムを作り、人手不足に対応する。

ごみ収集にGPSなどの通信技術を採り入れたシステムを、19年春から2つの自治体で試験的に導入する。実証実験を3年程度続けて効果を検証する。19年度予算に6千万円を計上しており、公募して自治体を決める。

具体的には、収集車にGPSを取り付けて実際の回収ルートや停車時間などの情報を集める。ゴミの投入口にセンサーを取り付けて、回収したゴミ袋の数を把握するなどして、ごみ収集の詳細なデータを定量的に集められるようにする。

一定期間で集めたデータを元に、外部のコンサルタントなどの協力も得て、収集車が最も効率よく経費がかからない経路で回れるようにする。

例えば、現在は細かいデータがないため、回収量が少ない地域でも、大型の収集車を導入したり、人手を余分に配置したりするといった例が少なくないという。

また複数台で1つの地域を回収する場合などでは、ルートが重複する場合もあるという。無駄を省けるようにするとともに、運送時に排出する二酸化炭素（CO_2）の量を減らせて、温暖化対策にもなる。

データを定量的に得ることで、曜日などによって異なるごみの量も予想できるようになる。車両や人員、作業時間を減らせるとみている。

各家庭でも収集車の位置を把握できるようになる。ゴミを出す時間をより柔軟にできる可能性がある。地方ではごみを数時間放置しただけで、カラスなどの鳥獣に荒らされる場合もある。収集車が来る時間に合わせてごみを出せれば、衛生面の改善にもつながる。

このような通信技術を活用した収集例は、広島県瀬戸市など全国でもわずかしか例がないという。環境省はモデルケースを作り、全国に展開する考えだ。（安裕大資）

一筆書きの考えは生活面で効率化を考えるときにも使えそうです。2019 年 1 月 7 日の日経産業新聞に「ごみ、IoT で省力回収」と言う見出しで、ごみ収集車が一般ごみの収集の効率化を図り、人手不足解消、車からの二酸化炭素排出量削減、時間短縮などに向けて取り組む例が取り上げられていました。

これを考えるときに、これまでのグラフ表してみます。

頂点がごみ集積・回収地点、辺がゴミ収集車の走行路です。

例えば、図 23 はこれまで行われて

いるゴミ収集車のルートの例とします。

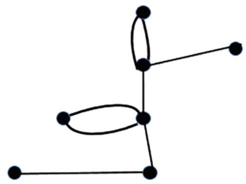


図 23

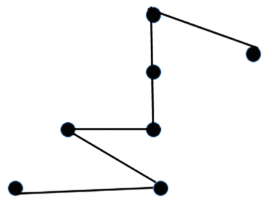


図 24

ここで経路を検討してみると、図 24 のようにすることでごみ集積・回収地点をすべて通って一筆書きでまわることが出来ます。

この例は通過地点が少ないので、簡単にルートが見つかりますが、実際にはもっと複雑ですが、グラフの考え方を使うことで、問題を単純化して解決しやすくなります。

また、カーナビゲーションシステムなどでも、これまで考えてきたグラフの考え方が使われています。

しかし、これらは頂点の数が多くなると、結論を出すのに急激に時間がかかるようになります。そのために高性能なコンピュータを使って解決する方法がとられています。

このような数学の分野は「離散数学」と呼ばれています。「世界地図で国別・地域別に色別に塗り分けるときに、隣り合う国などが同じ色にならないようにするには４色あればよい」ことも、この分野で考え、証明されました。

コンピュータの利用と数学の分野が密接になって様々な応用がなされています。

みなさんも、ほかにどのような場面でつかわれているか調べてみてください。

参考資料

1) 話題源数学　吉田稔・飯島忠 東京法令出版 1989

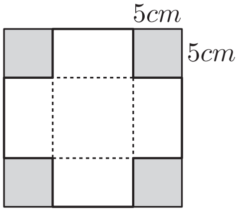
2) グラフ理論入門基本とアルゴリズム　宮崎修一 森北出版 2017

3) やさしいグラフ論 田澤新成 , 白倉暉弘 , 田村三郎 現代数学社 2003

第３章　２次方程式の解について

１．２次方程式の解、中学から高校へ

私たちは中学３年生の数学で２次方程式について学びます。まずは次の２次方程式の問題を見てみましょう。



「右図のように正方形の紙の４すみから１辺が $5cm$ の正方形を切り取り、直方体の容器を作ると容積が $720cm^3$ になりました。元の正方形の紙の１辺の長さは何 cm か、方程式を用いて求めなさい。」

元の正方形の紙の１辺の長さを xcm とすると、底面が１辺 $(x-10)cm$ の正方形で、高さが $5cm$ の直方体が得られます。したがって容積を表す式は $(x-10)^2\times 5 = 720$ となり、これを解いて答えを求めることになります。この方程式を解くと、

$$(x-10)^2 \times 5 = 720$$
$$(x-10)^2 = 144$$
$$x^2 - 20x + 100 = 144$$
$$x^2 - 20x - 44 = 0$$
$$(x-22)(x+2) = 0$$
$$x = 22,\ -2$$

となり、$x = 22,\ -2$ が求まりました。これが問題の答えなのでしょうか？

今回の問題では「元の正方形の紙の１辺の長さ」を求めようとしていたので、答えとして適切なのは正の数です。そのため $x = 22cm$ は問題ありませんが、「負の数の長さ」である $x = -2cm$ は答えとしては不適切です。したがって、この問題の答えは $22cm$ となります。

ここで少し考えてみましょう。方程式を解いて求まったのは $x = 22,\ -2$ という２つの値でしたが、答えは $x = 22$ だけでした。ということは求まったもう一つの値、$x = -2$ は一体なんだったのでしょうか？

これは実は「方程式の解」であり、「問題の答え」ではないのです。

「方程式の解」とは「その式に代入すると等号(=)が成立する値全て」のことです。先程の問題では $x = 22, x = -2$ のどちらを方程式に代入しても、左辺 $(x-10)^2\times 5$ の計算結果は 720 となるので、左辺と右辺をつなぐ等号(=)が成立しています。

したがって「方程式の解は $x = 22,\ -2$」ということになります。しかし今回の問題では正方形の紙の１辺の長さを求めていたので、x は正の数でなければなりません。そのため問題の答えから負の数である $x = -2$ が除かれ、$x = 22$ のみが残るのです。

あまり気にしたことがないかもしれませんが、方程式などで変数 x を見かけたときは、その x にはどのような数が想定されているのかをきちんと確認しておく必要があります。例えば上記の問題で x が正の数でなければならないということに気がつかなければ、$x = -2$ も答えとして堂々と書いてしまうことになるからです。そしてこれと同じようなことは、内容が難しくなっていく高校・大学の数学でも起こります。先ほどの問題で区別したのは正の数・負の数でしたが、有理数・無理数・整数・自然数など、数にはたくさんの分類があります。高校の範囲では、中学の範囲で学ぶこれらの数を全てまとめて「実数」と呼んでいます。中学の範囲では「実数」以外の数を学ばないので単に「数」と呼んでいるのですが、高校の範囲になると、それまでには学ばなかった「新しい数」を学ぶことになります。「新しい数」とは「２乗すると負の数になる数」というものです。この「新しい数」は「実数とは違う数」であり、「虚数」と呼ばれています。そして「実数」と「虚数」を合わせた、「複素数」という新しい数の分類を考えることができるようになるのです。

初めて知る人は「２乗すると負の数になる数」って何 !? と思いますよね。具体的なイメージを持つことが非常に難しい数であり、実在しない、意味のない数を考えているかのように感じるかもしれません。しかし実際には電気回路の解析や土木・建築関係の振動解析など、さまざまな形で私たちの生活を支えている数なのです。今回は、高校の範囲になりますが、２次方程式の解が「実数」になる場合と「虚数」になる場合、この２つを比較してどんな違いがあるのかを考えてみたいと思います。

　先ほどの問題にもありましたが、中学３年生では２次方程式の解の求め方として因数分解や解の公式を学びます。高校の範囲でもさらに２次方程式について学んでいくことになるのですが、そこでは「判別式」「実数解」「虚数解」といった言葉が出てきます。

　「判別式」は「解の公式のルートの中の部分」のことです。中学の範囲では基本的に出題されませんが、２次方程式によっては解の公式を適用したときに、

ルートの中の値が負の数になることがあります。

$$\textbf{例:}\quad x^2-4x+5=0,\ x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times5}}{2\times1}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}.$$

ルートの中の値が負の数になるのはおかしいので、このような場合は解無し、つまり解は存在しないと答えることになります。そして逆にルートの中の値が正の数ならばちゃんと解が存在するということになります。このような性質を利用してルートの中だけを見て解があるのかないのか、もしくは解がいくつあるのかを求めるのが「判別式」です。これは高校１年生で学びます。

「ルートの中の値が負の数」とは、例の中の「$\sqrt{-4}$」のような数のことです。

この数は２乗するとどうなるのでしょうか？

ルートの性質を考えると、「$\sqrt{-4}^2=-4$」となるはずですよね。

このような数が「２乗すると負の数になる数」、「虚数」と呼ばれる数です。

判別式を最初に学ぶのは高校１年生ですが、高校２年生では「虚数」「複素数」という言葉を学ぶことになるので、その後は２次方程式の解の公式においてルートの中の値が負の数になってしまう場合も、解無しではなく、きちんと解が存在するものとして取り扱うようになります。そしてその際、「実数解」「虚数解」という言葉を学びます。これらは２次方程式の解として求まった数が実数と虚数のどちらの種類の数であるかを区別するための言い方であり、「判別式」を使えばこれらの数の種類も区別して解の個数を数えることができるのです。つまり「解が２個」というだけではなく、その２つの解が「実数解」なのか「虚数解」なのかを「判別式」の正負によって知ることができるのです。

　またそれとは別に、中学３年生では関数 $y=ax^2$ について学びます。これは高校の範囲では２次関数と呼ばれているもので、右辺が x の２次式の形をしていることからこのように呼ばれています。ただし高校では２次関数として、$y=ax^2$ だけではなく、右辺が x の２次式になっているもの全て、すなわち $y=ax^2+bx+c$ といった形のもの全てを扱うことになります。

　２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ と同様に放物線の形をしていますが、$y=ax^2$ の頂点が原点にあったのに対して、$y=ax^2+bx+c$ の頂点は原点にあるとは限りません。２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは a, b, c の値によってグラフの位置と形を変えてしまうので、頂点だけではなく x 軸や y 軸との交点の座標も問題によって毎回異なるのです。しかし一般的にグラフと x 軸との交点の

x 座標は $y = 0$ を代入すると求めることができるので、２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は、２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を解くことで求まります。

これらの関係から「判別式」によって求まった２次方程式の解の個数は、２次関数のグラフと x 軸との交点の個数でもあるということが分かるのです。

この章は、高校で学ぶこれらの知識を前提とした内容になっています。前半部分には基本的な各用語の定義と簡単な説明を掲載しました。すでに学習したことがある方は、用語の確認として利用して下さい。まだ学習前の方には少し難しいかもしれませんが、ここまでの解説と照らし合わせて、是非チャレンジしてみてください。

２．用語の確認（２次方程式・複素数、数Ⅰ・数Ⅱ）

２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は、「x の２次式 $ax^2 + bx + c$ が 0 に等しい」というだけではなく「２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において y の値が 0 の場合に対応する」と解釈することもできます。この２次関数をグラフで見ると、２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は、２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において $y = 0$ をみたす点、すなわち２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との交点の x 座標と考えることができます。

ところで与えられた２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を解くと、その解が実数ではなく虚数になることがありますよね。２次方程式の解が２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との交点の x 座標と考えることができるのは、解が実数の場合に限ります。なぜなら、x 軸上に虚数なんて見当たらないからです。では２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が虚数の場合、解が実数の場合と同じように、その解は２次関数のグラフに対して何か意味を持つのでしょうか？それとも、特に意味なんてないのでしょうか？

詳しく見ていく前に、まずは基本的な用語を整理していきましょう。ここでは x, y を変数、a, b, c を定数として扱います。そして最初は、これらは全て実数として考えます。

２次方程式の解の公式（数Ⅰ）

２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ である。

２次方程式の判別式と実数解の個数（数 I）

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=$ b^2-4ac とするとき次が成り立つ。

$$D>0 \iff \text{異なる２つの実数解をもつ}$$
$$D=0 \iff \text{１つの実数解（重解）をもつ}$$
$$D<0 \iff \text{実数解をもたない}$$

これはつまり解の公式においてルートの中の式（値）の正負で解の個数を調べることができるということです。そして x 軸上の点は y 座標が 0 であることから、次のように２次関数と２次方程式が関係していることが分かります。

２次関数と２次方程式（数 I）

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は、２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である。

以上より、次のように２次方程式の判別式と実数解の個数が２次関数のグラフと x 軸との交点の個数に対応していることがわかります。

２次関数のグラフと x 軸との交点の個数（数 I）

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=$ b^2-4ac とするとき、２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との交点の個数に関して次が成り立つ。

$$D>0 \iff \text{交点は２個}$$
$$D=0 \iff \text{交点は１個}$$
$$D<0 \iff \text{交点は０個}$$

ここまでは数 I で学ぶ内容なのですが数 II で再び２次方程式の解の公式や判別式とを学ぶことになり、そこでは虚数に関する情報が追加されます。

複素数（数 II）

２乗すると -1 になる数を i で表す（$i=\sqrt{-1}$）。
実数 a,b に対して $a+bi$ の形で表される数を複素数という。
複素数 $a+bi$ は、$b=0$ のとき $a+bi=a+0i=a$ すなわち実数となる。また $b\neq 0$ のとき実数ではない複素数となり、これを虚数という。

例えば $\sqrt{-4}$ という数は、i を用いて次のように表すことができます。

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=\sqrt{4}\times i=2i.$$

２次方程式の解の個数について、数 I の範囲では判別式の値が負のときは「実数

解をもたない」とされていました。しかし x を実数ではなく複素数だと考えれば（つまり x の範囲を実数だけではなく虚数も考えて良いことにすれば）負の数の平方根も考えることができるため、「解無し」という状況はなくなります。一般に実数を係数とする２次方程式は、複素数の範囲まで考えると次のように必ず解を持つことになります。

判別式と２次方程式の解の種類（数 II）

２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とするとき、次が成り立つ。

$D > 0 \iff$ 異なる２つの実数解をもつ

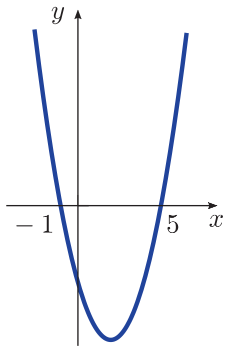
$D = 0 \iff$ １つの実数解（重解）をもつ

$D < 0 \iff$ 異なる２つの虚数解をもつ

ではここで、実際に２次方程式の「実数解」、「虚数解」を求めてみましょう。

$\boxed{1}$ まずは２次方程式 $x^2 - 4x - 5 = 0$ の解を求めてみます。

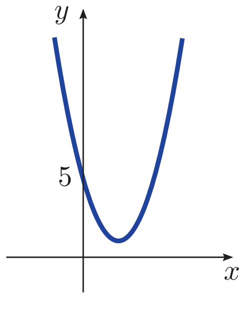
$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1} \\
x &= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \\
x &= \frac{4 \pm 6}{2} \\
x &= 2 \pm 3 \\
x &= -1,\ 5
\end{aligned}
$$



異なる２つの実数解 $x = -1, 5$ が求まりました。これは２次関数 $y = x^2 - 4x - 5$ のグラフと x 軸との交点の x 座標を求めていることに対応しています。実際にグラフを見てみると、このグラフは x 軸の $-1, 5$ のところで交わっていることがわかります。

$\boxed{2}$ では次に２次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の場合はどうでしょうか？

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \\
x &= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\
x &= \frac{4 \pm 2i}{2} \\
x &= 2 \pm i
\end{aligned}
$$



今度は異なる２つの虚数解 $x = 2 \pm i$ が求まりました。これも先程と同様に２次関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフと x 軸との交点の x 座標を求めていることに対応しているはずですが、x 軸上には「$2 \pm i$」という数は見つかりません。実際、このグラフは x 軸とは交わっていません。
やはり虚数解が出るとき（判別式が負のとき）は、グラフと x 軸との交点は０個なのですね！

... あれ？

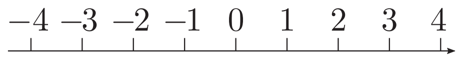
虚数を知る前は、２次方程式の判別式が負の場合は解無し、対応する２次関数のグラフは x 軸とは交わらないということで納得ができました。しかし虚数が導入されると、解が存在しないわけではなく「虚数解」というものが具体的に求まることになってしまいます。この具体的な数には、何か意味があるのでしょうか?

例えば $x^2 - 4x + 5 = 0$ と $x^2 - 2x + 5 = 0$ という２つの方程式を考えてみます。これらはどちらも判別式が負になるので、$y =$(左辺) としたときのグラフは x 軸とは交わりません。交わらないという点では同じなのですが、方程式の解はそれぞれ $x = 2 \pm i, x = 1 \pm 2i$ と、異なる値が具体的に求まります。

２次方程式の変数 x を複素数の範囲まで広げる場合、「虚数解は x 軸なんか関係ない」「虚数解には何の意味もない」とでも言うかのように、それ以上触れられることはありません。確かに方程式から作ることができる２次関数 $y =$(左辺) のグラフが x 軸と交わらないのは、実際にグラフを書いてみれば確かめることが出来ます。しかしだとしたらなおさら具体的に求まってしまった虚数解が何なのか気になりますよね。

３．実数は直線・複素数は平面

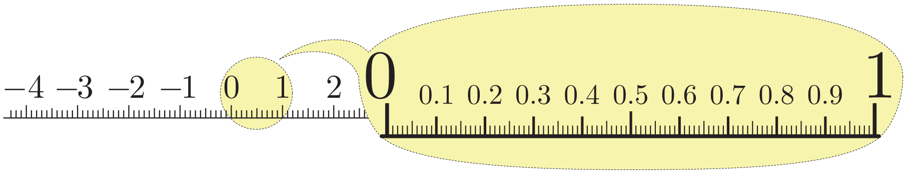
みなさん「数直線」を知っていますよね。



簡単に言うと直線の上に数を書いて数の大きさをわかりやすくしたもので、左に行くほど小さく、右に行くほど大きくなるように数を並べたものです。しかし上の図だけを見ると、わざわざ直線を書く必要性がいまいちわかりません。

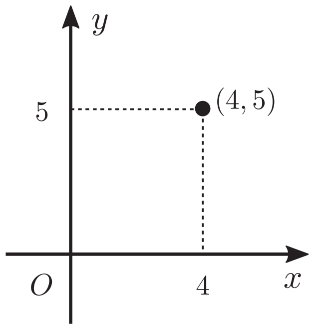
$$-4\quad -3\quad -2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4$$

このように数を並べるだけではだめなのでしょうか？ここに直線も添えて、まるで図形のように描く必要はどこにあるのでしょうか？それは次の図のように



表示されているそれぞれの数と数の間に、まだまだたくさんの数が存在するからです。元の数直線の図では整数だけを数字で表記していますが、整数以外の数も考えると、図に示した小数なども含めた有理数や無理数など、たくさんの数が存在しているはずです。実数をすべて集めると、数と数の間のすき間をしっかりと埋めることができるのです。しかし実数はあまりにも多すぎるので、すべての数字を書き出して並べることはできません。そこで実数全体を、直線を用いて図で表現しているのです。数直線とは、実数全体の集合を直線に対応させたものなのです。

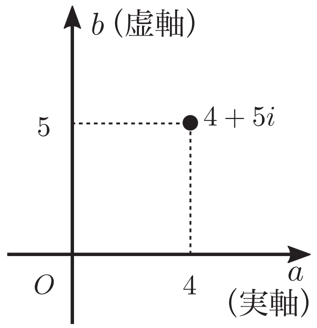
直線は実数に対応すると説明しましたが、平面はどうでしょうか？まず平面上に２本の数直線を描いてみましょう。このとき２本は互いに原点で交わり、また互いに直交しているものとします。一般に一方の数直線を x 軸と呼び、もう一方の数直線を y 軸と呼びます。この x 軸・y 軸はどちらも数直線なので、それぞれが別々の実数の集合に対応していると考えることができます。そしてそれぞれの数直線から数を対応させることで、平面上のすべての点に対して、実数のペア (x, y) がただ１つに定まります。すなわち平面は、実数のペア (x, y) の集合に対応していると言えるのです。



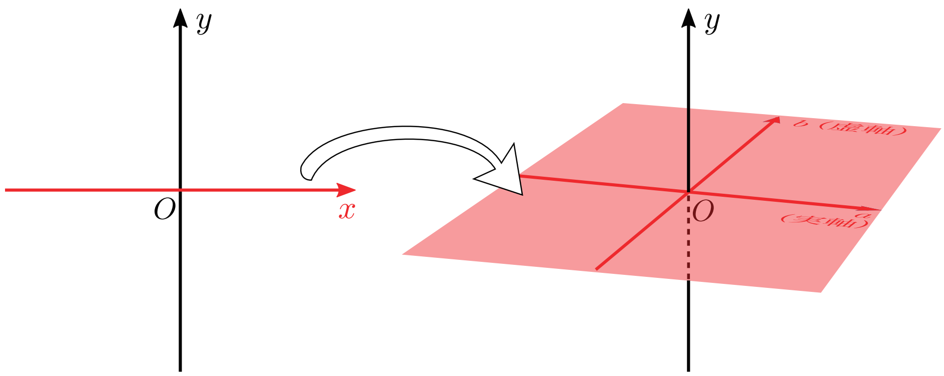
では続いて複素数について考えてみましょう。実数 a, b に対して $a+bi$ の形で表される数を複素数といいます。単純に表記方法だけに着目すると、複素数は２つの実数 a, b によって表現できる数として見ることができます。つまり複素数を実数のペア (a, b) だと考えることができるので、複素数を平面に対応させることができるのです。右の図は複素数「$4+5i$」を平面上の１点に対応させている例です。

ここでは複素数を $a+bi$ の形で表しているので、２つの実数 a, b を対応させる数直線はそれぞれ a 軸、b 軸としています。a 軸、b 軸はそれぞれ「実軸」、「虚軸」とも呼ばれます。

この図のような平面は複素数平面と呼ばれ、高校では数学 III（2022 年度からの新課程では数学 C）の範囲で取り扱われます。



それでは本題である２次方程式の虚数解と２次関数の話に戻ります。これまでは関数を考えるにあたって x, y をどちらも実数としていたので、x 軸, y 軸として２本の数直線を用いてグラフを描いていました。しかし x の範囲を複素数にまで広げるとなると、x 軸という１本の数直線だけでは不十分なはずです。なぜなら複素数は２つの実数のペアで表現される数であり、直線ではなく平面に対応しているものだからです。すなわち x の範囲を複素数にまで広げて考えるということを正しく図で表現するならば、次の図のように x 軸という数直線を複素数平面に拡張する必要があるはずです。しかし高校の範囲では変数 x の範囲を複素数に拡張した場合でも x 軸は拡張せずにグラフを描いているので、実は見ていない部分が存在することになります。



そして２次方程式の実数解が２次関数のグラフと x 軸との交点に対応していることを見れば、x 軸を複素数平面に拡張して見た場合の２次方程式の虚数解は２次関数のグラフと複素数平面との交点に対応していると考えるのが自然ではないでしょうか? ここからは実際に、x 軸を複素数平面に拡張してグラフを描いてみましょう。

４．x を実数から複素数へ

x を実数から複素数に拡張するということは x に複素数を代入できるようになるということなので、y の値も複素数になる可能性が出てきてしまいます。そうなると y 軸も数直線（実数）では不十分ということになります。しかし x 軸・y 軸の両方を複素数平面に拡張するとなると、軸が合計４本必要になります。

数学では１本の軸（数直線）で表現できる空間を「１次元空間（直線）」と呼びます。さらに２本の軸を互いに直交するように描くことで表現できる空間を「２次元空間（平面）」、３本の軸を互いに直交するように描くことで表現できる空間を「３次元空間（空間）」と呼びます。そして、４本の軸を互いに直交するように描くことで表現できる空間は「４次元空間」と呼びます。３次元空間のように３本の軸は問題なく配置できるのですが、４本目の軸を正しく配置するには、４次元空間というものを正しく理解し、正しく描く必要があります。わたしたちは４次元空間を自由に往来できるわけではないのでこれは非常に困難です。残念ですが今回は軸を３本だけに限定して考えるために y の範囲は実数のみに限定することにして、そのために必要な条件を付け加えることにしましょう。ここから２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において x の範囲を複素数に拡張しますが、記号が被ってしまうと困るので $x = a + bi$ ではなく $x = x_R + x_I i$ と書くことにして、これを x に代入します。さらに複素数を $a + bi$ という形で定義したので実数の部分 (a) を前、i がかかっている虚数の部分 (b) を後ろにまとめた形にするために、次のように式を整理します。

$$
\begin{aligned}
y &= a(x_R + x_I i)^2 + b(x_R + x_I i) + c \\
y &= ax_R^2 + 2ax_R x_I i - ax_I^2 + bx_R + bx_I i + c \\
y &= (ax_R^2 - ax_I^2 + bx_R + c) + (2ax_R x_I + bx_I)i
\end{aligned}
$$

このままでは y は複素数のままになってしまうので、y の範囲が実数であるためには、前半の実数の部分 $y = ax_R^2 - ax_I^2 + bx_R + c$ 以外を消してしまう必要があります。そこで、条件 $2ax_R x_I + bx_I = 0$ を付け加えます。この式は変形すると $(2ax_R + b)x_I = 0$ となり、これが成立する状況は次のように分けて考えることができます。

$$\begin{cases} x_I = 0 \\ x_I \neq 0,\ 2ax_R + b = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_I = 0 \\ x_I \neq 0 \begin{cases} a = 0,\ b = 0 \\ a \neq 0,\ x_R = -\frac{b}{2a} \end{cases} \end{cases}$$

このことから、x の範囲を複素数に拡張すると次のような条件付きの関数を得ることができます。

$$y = ax_R^2 - ax_I^2 + bx_R + c\,, \qquad \text{条件} \begin{cases} x_I = 0 \\ x_I \neq 0 \begin{cases} a = 0,\ b = 0 \\ a \neq 0,\ x_R = -\frac{b}{2a} \end{cases} \end{cases}$$

この関数は右辺に x_R と x_I の２種類の変数があります。この内容は高校の範囲ではないのでグラフの書き方の詳しい解説はしませんが、このようなグラフは直線や曲線ではなく、平面や曲面になります。では上記の条件を付け加えると、グラフはどのようになるのでしょうか。

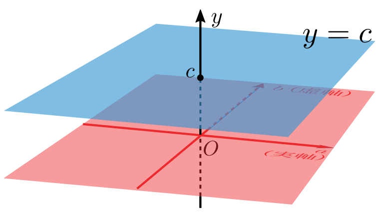
５．虚数解を目で見る

$x_I = 0$ **の場合**：

このケースでは $x = x_R + x_I i$ が $x = x_R$ となり、先ほど得られた関数 $y = ax_R^2 - ax_I^2 + bx_R + c$ に代入すると $y = ax_R^2 + bx_R + c$ となります。関数の式からは x_I が消え、高校で学ぶ２次関数の式 $y = ax^2 + bx + c$ と同じ形になりました。このケースはもちろん虚数解とは関係ないので、他のケースを見ていくことにしましょう。

$x_I \neq 0$ の場合：

$a = 0,\ b = 0$ の場合：このケースでは関数 $y = ax_R^2 - ax_I^2 + bx_R + c$ は $y = c$ となります。c は定数なのでグラフは右図のような平面となり、x 軸を拡張させた複素数平面との交わりがないことがわかります。



$a \neq 0,\ x_R = -\frac{b}{2a}$ の場合：つまり x_R が a, b で定まる定数のケースです。このケースでは関数 $y = ax_R^2 - ax_I^2 + bx_R + c$ は $y = -ax_I^2 - \frac{b^2}{4a} + c$（ただし $a \neq 0,\ x_R = -\frac{b}{2a}$）となります。これは y 軸と x_I 軸が作る平面に平行な、別の平面の中に描くことができる２次関数です。x の範囲を複素数に拡張する

前の x 軸を、拡張後の x_R 軸と重なるように描くとすると、このグラフは元のグラフと直交する向きに描くことができます。

さらに頂点を求めることによって拡張する前後のグラフの位置関係を見てみましょう。元のグラフの x 軸が拡張後の x_R 軸と一致するとすると、元のグラフは $y = ax_R^2 + bx_R + c = a(x_R + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ となり、頂点は $(x_R, y) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c)$ となります。さらに x_I 軸も加えた空間の中で描く場合、頂点の座標は $(x_R, x_I, y) = (-\frac{b}{2a}, 0, -\frac{b^2}{4a} + c)$ となります。そして拡張後に条件を付け加えたグラフは $y = -ax_I^2 - \frac{b^2}{4a} + c$（ただし $a \neq 0,\ x_R = -\frac{b}{2a}$）なので、頂点の座標は $(x_R, x_I, y) = (-\frac{b}{2a}, 0, -\frac{b^2}{4a} + c)$ となり、元のグラフの頂点と一致していることが分かります。また x^2 の係数の符号が変わっているので、元のグラフと拡張後のグラフは上下の向きが逆になっていることも分かります。

以上のことをまとめると、２次方程式の虚数解は、「与えられた２次関数のグラフとは上下が逆で、元のグラフと頂点を共有し互いに直交するグラフ」と、x 軸を拡張した複素数平面との交点に対応しているということになります。

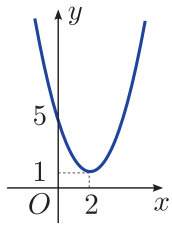
その実際のグラフの様子を、最初に虚数解を求めた２つの例で見てみましょう。

$$① \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 0 \\ x = 2 \pm i \end{cases} \qquad ② \begin{cases} x^2 - 2x + 5 = 0 \\ x = 1 \pm 2i \end{cases}$$

この２つの例はどちらも $a = 1, c = 5$ のケースです。さらにこれらは

① $b = -4,\ x_R = 2,\ x_I = \pm 1$、② $b = -2,\ x_R = 1,\ x_I = \pm 2$ となっており、どちらも $x_I \neq 0,\ x_R = -\frac{b}{2a}$ のケースにあたることが確認できます。

それではグラフを描いていきましょう。

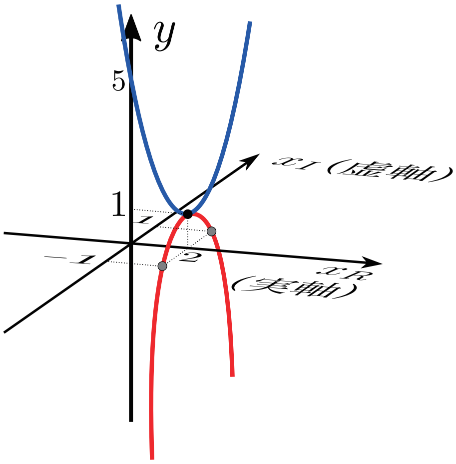


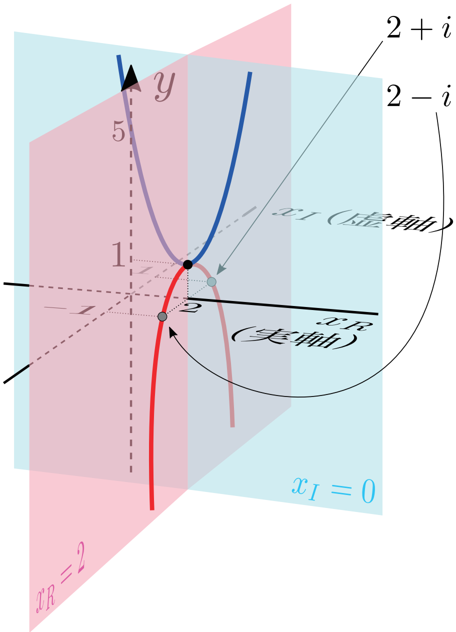
① $x^2 - 4x + 5 = 0,\ x = 2 \pm i$ の場合

まず $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフは、$y = (x-2)^2 + 1$ より頂点が $(2, 1)$ の下に凸なグラフなので、x 軸とは交わりません。

ここで、x の範囲を複素数に拡張した関数 $y = ax_R^2 - ax_I^2 + bx_R + c$ において $a = 1,\ b = -4,\ c = 5$ を代入すると、$y = x_R^2 - x_I^2 - 4x_R + 5$ となります。ただし条件 $x_R = -\frac{b}{2a} = 2$ があったので、これも代入する必要があります。すると $y = 4 - x_I^2 - 8 + 5$ となり、$y = -x_I^2 + 1$（ただし $x_R = 2$）が得られます。これよりこのグラフは頂点の座標が $(x_R, x_I, y) = (2, 0, 1)$ であることがわかります。また複素数へ拡張する前の x 軸を拡張後の x_R 軸と重なるように描くとすると拡張前は $x_I = 0$ と見ることができます。したがってこれらの頂点は一致しており、グラフ

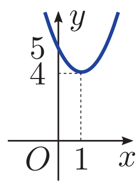
は次の図のようになることがわかります。そして拡張後のグラフは「与えられた２次関数のグラフとは上下が逆で、元のグラフと頂点を共有し互いに直交するグラフ」となっているので、この拡張後のグラフと複素数平面との交点の座標が虚数解 $x = 2 \pm i$ に対応していることがわかります。





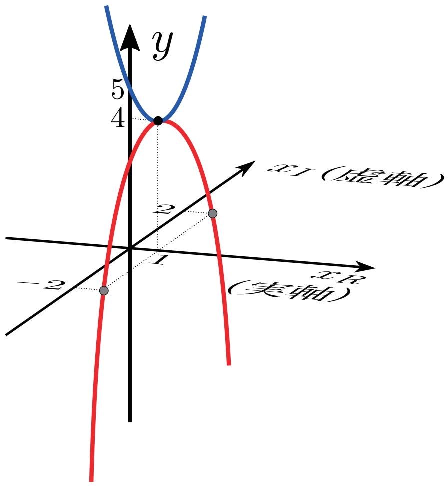
もう一つの例、②についても見ておきましょう。

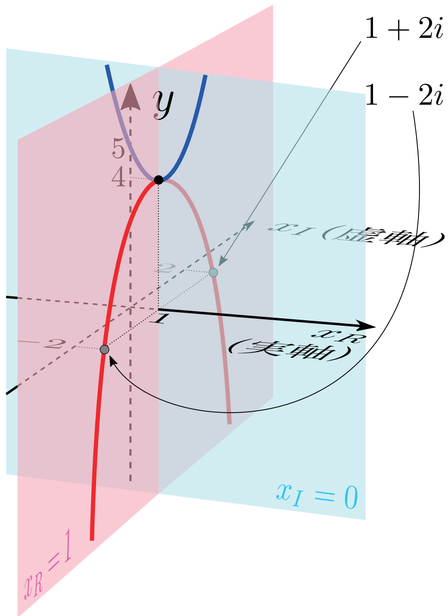
② $x^2 - 2x + 5 = 0,\ x = 1 \pm 2i$ の場合



$y = x^2 - 2x + 5$ のグラフは、$y = (x-1)^2 + 4$ より頂点が $(1, 4)$ の下に凸なグラフなので、これも x 軸とは交わりません。

先の例と同様に x の範囲を複素数に拡張した関数 $y = ax_R^2 - ax_I^2 + bx_R + c$ において $a = 1, b = -2, c = 5$ を代入すると、$y = x_R^2 - x_I^2 - 2x_R + 5$ となるので、これに条件 $x_R = -\frac{b}{2a} = 1$ も代入します。すると $y = 1 - x_I^2 - 2 + 5$ となり、$y = -x_I^2 + 4$（ただし $x_R = 1$）が得られます。このグラフは頂点の座標が $(x_R, x_I, y) = (1, 0, 4)$ なので、やはり元の関数の頂点と一致しています。そして拡張後のグラフは「与えられた２次関数のグラフとは上下が逆で、元のグラフと頂点を共有し互いに直交するグラフ」となっているので、やはりこのケースも、複素数への拡張後のグラフと複素数平面との交点の座標が虚数解 $x = 1 \pm 2i$ に対応していることがわかりました。





この章では授業で詳しくは触れない内容について考えてみました。放物線のグラフを描くときは、位置と形、そして放物線がどの方向を向いている（上に凸・下に凸）のかという３つ情報が必要です。しかし今回のように放物線のグラフを平面ではなく空間の中に描く場合、放物線を回転させることもできるため、放物線の向きとして、上に凸・下に凸以外の方向も考える必要があるのです。そのため図を見てもイメージするのが少し難しかったかもしれませんが、ここで用いた計算自体は高校で扱う範囲で理解できる内容だったのではないかと思います。学ぶ内容が難しくなるにつれて、試験勉強と関係ない限りちょっとした疑問について考える機会はどんどん少なくなっていきます。しかし疑問に気がついた際には、是非ゆっくりと考える時間を作ってみて下さい。たとえ自分なりに考えるだけでも、授業とは少し違う数学の楽しさを感じることができるかもしれません。

第４章　ことばの大切さ・ひろがる数学

１．ことばの大切さ

数学を勉強する上で文章を正しく読むことはとても重要です。もちろん「公式」「解法」などを覚えることも大切ですが、これらは適切な場面で使用できなければ意味がありません。覚えた公式や解法をどの場面で使用すれば良いのかを正しく判断するためには、問題に書かれている文章を正しく読み取る力が必要です。当たり前のことを言っているように感じるかもしれませんが、数学では文章や問題のパターンが限られているので、だんだん慣れてきて「これはあのパターンだな」というように、自分で文章を予測するようになってしまうことがあります。予測するというと少し大げさかもしれませんが、文章の読み間違いが原因で答えを間違えた経験があるという人は多いのではないでしょうか。そのひとつの例として、次の問題を考えて見てください。

「カメラとケースの値段を合わせると、21000 円です。カメラの値段はケースの値段より 20000 円高いです。ケースの値段はいくらでしょうか。」

この問題を読んで反射的に、ケースの値段は 1000 円だと思った人はいませんか? ケースの値段が 1000 円だとすると、カメラの値段はそれより 20000 円高いので 21000 円となり、合計金額は 22000 円になってしまいます。ケースの値段は 500 円で、カメラの値段はそれより 20000 円高い 20500 円が正解ですね。この問題を読んで疑うことなく 1000 円が答えだと確信してしまった人は問題の文章の内容を正しく読み取れなかったか、もしくは適切な解法を選択できなかったということになります。このような間違いが重なると「数学の才能がない」「数学が苦手だ」という思いが生まれてしまいます。しかしこのような間違いは意識して丁寧に文章を読み、じっくりと考える習慣をつけることである程度対処できるようになるはずなのです。

また肝心の文章ですが、読み手や読み方によって異なる意味で捉えることができるような文章ではいくら丁寧に読んでも意味がありません。数学においてそのような文章は不適切なので、数学では、誰が読んでも全く同じ情報を読み取ることができるような文章が用いられます。ただし数学には数学特有の言葉があるので、それを知らずに読んでいると数学の文章の中で使われる言葉の意味が分からなかったり、不思議な文章に見えてしまったりするかもしれません。そうなると、文章の意味を正確に読み取るのが難しくなります。そうならない

ようにするためにも、数学の文章を読む人は「正しい読み方」を知っておく必要があります。

数学の理論はある一定の知識を前提として、それだけを用いて展開されます。したがってこの前提となる知識を正確に認識しておくことが数学の話をする際には必須となるのです。この前提となる知識は計算方法や公式、定理といったものだけを指しているのではありません。数学における言葉の意味や数学特有の表現といったものも正確に知っておく必要があります。

この章では高校数学における「集合と論理」の範囲の中から、「命題」について取り扱います。命題は、数学なのに「言葉」を学ぶ範囲です。この範囲では、逆・裏・かつ・または・ならば... など、日常生活で聞いたことがある日本語がたくさん出てきます。聞いたことがある言葉なので理解しているつもりになってしまいがちですが、実はそのせいで混乱してしまう高校生がたくさんいるのです。「言葉」を扱う範囲において、基本となる言葉の意味が曖昧なままで文章を正確に読み取れるはずがありません。まずは教科書に載っているいくつかの言葉の確認から始めていきましょう。

２．用語の確認（集合と命題、数I）

命題

正しいか正しくないかがはっきり決まる文や式を命題という。命題が正しいときその命題は真であるといい、正しくないときその命題は偽であるという。

例えば「4は偶数である」という文は命題です。また内容は正しいのでこの命題は真であると言えます。しかし「1000は大きい数である」という文は、人によって意見が異なる可能性があり正しいか正しくないかがはっきり決まらないため、命題ではありません。

条件

変数を含む文や式で、その変数に値を代入したときに初めて真偽が定まるものを条件という。条件は p や q などの文字で表すこともある。

例えば「$x < 3$」という式は条件です。この条件は、$x = 1$ や $x = 2$ を代入した場合は「$1 < 3$」「$2 < 3$」となり、これは正しいので真であると言えます。また $x = 4$

や $x = 5$ を代入した場合は「$4 < 3$」「$5 < 3$」となり、これは正しくないので、偽となります。

なお一般的に命題は２つの条件 p, q と「ならば」を組み合わせて表現されるものが多く、このような命題は次のように記号で表されます。

命題「$p \Rightarrow q$」

p, q を条件として、「p ならば q」の形で述べられる命題を、記号を用いて「$p \Rightarrow q$」で表す。このとき p を仮定、q を結論という。

「ならば」という日本語で表現されるので難しい表現には見えないのですが、「p ならば q」だけではあまりにも文章として簡潔すぎて、逆に混乱を引き起こしてしまうことがあります。具体的には、命題「$p \Rightarrow q$」は、「$3x = -12 \ \Rightarrow\ x = -4$」や「$x = 2 \ \Rightarrow\ x^2 = 4$」などといった使い方をします。そしてこの２つの命題はどちらも真であると言えます。ここでもう１つ「$x^2 = 4 \ \Rightarrow\ x = 2$」という命題を考えてみます。これは２つ目の命題の左右を入れ替えただけのものですが、実はこの命題は真ではないのです。左右を入れ替えただけで命題の真偽が変わってしまうのです。この命題が偽であることをすんなり納得できる人もいれば納得できない人もいると思います。この命題に関しては、「ならば」という言葉を「$\Rightarrow$」で表すというだけでは違いを説明することができないので、「p ならば q」を「ならば」の意味がもう少し分かりやすくなるように言い換えをしてみます。条件 p は仮定、q は結論ということなので、この命題は

「条件 p を仮定する　ならば　条件 q が結論として導かれる」

と書くことができます。注意しなければならないのは、条件 p を仮定したことによって導かれる結論全てが条件 q として表記されているということです。「結論として導かれる」という言い方には、「結論はこれで全てで例外はありません」という意味を含んでいるのです。先ほどの命題「$x = 2 \ \Rightarrow\ x^2 = 4$」は「$x = 2$ を仮定するならば $x^2 = 4$ が結論として導かれる」ということになり、x^2 が４以外の値になることはないので、確かにこれは真であると言えます。しかし命題「$x^2 = 4 \ \Rightarrow\ x = 2$」は言い換えると「$x^2 = 4$ を仮定するならば $x = 2$ が結論として導かれる」となりますが、$x^2 = 4$ を仮定するのであればその結論は $x = \pm 2$ となるはずです。しかしこの命題の結論には $x = 2$ しか書かれていません。これは「$x^2 = 4$ を仮定すると、結論として導かれるのは $x = 2$ だけです。」と主張してい

ることになります。結論として導かれるはずの $x = -2$ が結論に含まれていないので、この命題は偽となります。

ある命題「$p \Rightarrow q$」が偽であることは、今回のように「p を仮定したのに結論が q ではない」ことが分かる例を 1 つ挙げれば示すことができ、これを反例と言います。今回の場合は、結論として書かれている条件 $x = 2$ だけではなく $x = -2$ も仮定から得られるので、$x = -2$ が反例ということになります。

このような命題「$p \Rightarrow q$」においては、条件 p, q は矢印の前にあるか後ろにあるかでそれぞれ呼び方が異なります。

十分条件・必要条件

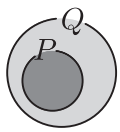
p, q を条件として、「$p \Rightarrow q$」が真であるとき、p は q であるための十分条件であるといい、q は p であるための必要条件であるという。

「$p \Longrightarrow q$」が真
十分条件　必要条件

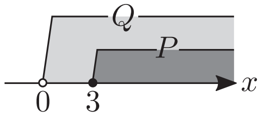
また条件 p, q に対して、命題「$p \Rightarrow q$」は別の言葉で「条件 p を満たすものは全て条件 q を満たす」と言い換えることができます。したがって、次のことが言えます。

命題と集合

条件 p をみたすもの全体の集合を P、条件 q をみたすもの全体の集合を Q とする。このとき命題「$p \Rightarrow q$」が真であることと、$P \subset Q$ が成り立つことは同じことである。



例えば x を実数とするとき、命題「$x \geqq 3 \;\Rightarrow\; x > 0$」は真です。そして、$x \geqq 3$ を満たす実数全体の集合を P、$x > 0$ を満たす実数全体の集合を Q とすると、集合の包含関係は $P \subset Q$ となっていることがわかります。



このように命題「$p \Rightarrow q$」において、条件 p, q に対応する集合 P, Q は集合として異なるものなので、条件 p を十分条件、条件 q 必要条件と呼んで区別しているのです。また条件 p, q の位置が逆の命題「$q \Rightarrow p$」が真である場合は条件 q を十分条件、条件 p 必要条件と呼びます。そして、次のように命題「$p \Rightarrow q$」と命題「$q \Rightarrow p$」の両方が成り立つ場合も考えることができます。

同値・必要十分条件

２つの命題「$p \Rightarrow q$」「$q \Rightarrow p$」がともに真であるとき、条件 p と q は同値であるといい、「$p \Leftrightarrow q$」と書く。これは条件 p, q をみたすものの集合 P, Q が一致する、つまり $P = Q$ が成り立つことと同じである。このとき p は q であるための必要十分条件であるといい、また q は p であるための必要十分条件であるともいえる。

例えば２つの命題「$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$」と「$x = \pm 2 \Rightarrow x^2 = 4$」はどちらも真なので２つの条件 $x^2 = 4$ と $x = \pm 2$ は同値であり、これらをまとめて「$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$」と書きます。

他にも条件に関する記号や集合との対応関係には次のようなものがあります。

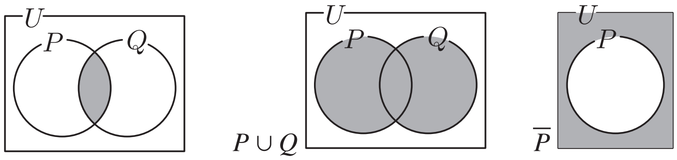
条件の否定

条件 p に対して、「p でない」という条件を p の否定といい、$\overline{p}$ で表す。

例えば自然数 n に対して条件 p を「n は偶数」とするとその否定 $\overline{p}$ は「n は偶数でない」となります。すなわち $\overline{p}$ は「n は奇数」という条件になるのです。

かつ・または

全体集合を U として、条件 p, q をみたすもの全体の集合を P, Q とする。このとき、条件
「p かつ q」を満たすものの集合は、P と Q の共通部分 $P \cap Q$ となり、
「p または q」を満たすものの集合は、P と Q の和集合 $P \cup Q$ となり、
「p でない」を満たすものの集合は、P の補集合 $\overline{P}$ となる。



$P \cap Q$　　$P \cup Q$　　$\overline{P}$

ここでも日常生活でも使用される「かつ」や「または」という表現に注意を払う必要があります。「p かつ q」は「p と q がどちらも真」という意味で使用し、「p または q」は「p と q のどちらかが真」という意味で使用します。日常生活において「または」という表現は「どちらか一方」「片方のみ」の意味で使用されることがよくあり、上記の内容も同じ意味に見えるかもしれませんが、数学では少し違う捉え方をする必要があります。「p または q」は「p と q のどちらかが真」という意味ですが、例えば p が真であった場合、q の真偽はどうなるのでしょう

か？数学において、言及されていないということは制限が与えられていないということになります。つまり、q の真偽はどちらでも良いのです。数学においては「p と q のどちらかが真」という言葉には、どちらか一方のみが真の場合だけではなく、「p と q がどちらも真」の場合も含まれているということになるので、集合としては P と Q の和集合 $P \cup Q$ で表現されることになるのです。

集合の範囲では命題を学ぶ前に、２つの集合 P, Q に対してド・モルガンの法則 $\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}, \quad \overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$ が成り立つことを学びます。また「p かつ q の否定」は「$\overline{p \text{ かつ } q}$」、「$p$ または q の否定」は「$\overline{p \text{ または } q}$」と書き表すことになるので、条件と集合の対応を考えると、集合におけるド・モルガンの法則は次のように書き直すことができます。

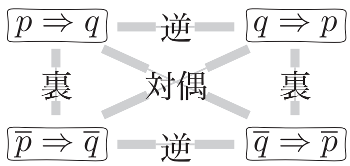
ド・モルガンの法則（条件）

「$\overline{p \text{ かつ } q}$」$\Leftrightarrow$「$\overline{p}$ または $\overline{q}$」，「$\overline{p \text{ または } q}$」$\Leftrightarrow$「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」.

命題「p ならば q」を「$p \Rightarrow q$」と書くということでしたが、この命題に対して、条件 p, q の場所を入れ替えたり各条件を否定したりすることで、次のような新しい命題を作ることができます。

逆・裏・対偶

命題「$p \Rightarrow q$」に対して、
　命題「$q \Rightarrow p$」を、「$p \Rightarrow q$」の逆、
　命題「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」を、「$p \Rightarrow q$」の裏、
　命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」を、「$p \Rightarrow q$」の対偶
という。

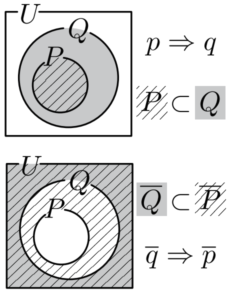


例えば先程例として見た命題「$x = 2 \;\Rightarrow\; x^2 = 4$」は真ですが、その逆にあたる「$x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = 2$」は偽でした。一般に命題が真であっても、その逆が真であるとは限りません。しかし、対偶に関しては次の性質が成り立つことが知られています。

命題とその対偶の真偽

命題「$p \Rightarrow q$」とその対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」の真偽は一致する。

全体集合を U、条件 p, q をみたすもの全体の集合を P, Q とすると、命題「$p \Rightarrow q$」が真であることは、$P \subset Q$ となることと同じであり（右図上）、さらにこのとき、$\overline{Q} \subset \overline{P}$ が成り立つ（右図下）ことから、「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」も真であることがわかります。
つまりある命題が真であればその対偶も真であり、また対偶が真ならば元の命題も真となるのです。



３．対偶はどこで使うのか

高校数学の範囲では、証明問題で対偶がよく使用されます。与えられた命題が真である（成り立つ）ことを示すのが困難な場合に、「命題と対偶は真偽が一致する」という性質を利用して、その対偶が真であることを示すことで、元の命題が真であることを示すという方法です。代表的な例に、『n を自然数として、命題「n^2 が偶数ならば n は偶数である」が真であることを証明せよ』という問題があります。これでは元の命題の逆を考えていることになるので、元の命題の真偽は分からないのです。n が与えられていて n^2 を考えるほうが楽なので先程のような間違いをする人は多いのですが、仮定として与えられているのは n^2 が偶数という条件だけです。n 自体がどんな数なのかはまだ分かっていないので、この考え方はできないのです。そこで、対偶の出番です。この場合対偶は「n が奇数ならば n^2 は奇数である」であり、これは 0 以上の整数 k を用いて次のように示すことができます。『奇数 n を $n = 2k+1$ とおくと、$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ となり、いま $2k^2+2k$ は整数なので、n^2 は奇数であると言える。』このように対偶が真であることが言えたので、元の命題も真となり、命題「n^2 が偶数ならば n は偶数である」が真であることが証明されました。

日常

命題やその対偶の考え方は、数学以外の場面にも適用することができます。例えば、統計的には交番の多い地域は犯罪の件数が多く、逆に交番の少ない地域は犯罪も少ない傾向にあるという話を聞いたことがあるでしょうか。もしもこのことを示すデータを見せられた上で、「交番が多い地域は犯罪が多い。だから犯罪が多い地域は交番の数を減らすべきだ。」と言われたら、みなさんは納得できるでしょうか？「交番が多い地域は犯罪が多い。」という主張が統計的には正しい主張だとしても、やはり違和感を感じます。この主張を命題として分かり

やすく言い換えると、「ある地域に交番が多い（仮定）ならばその地域には犯罪が多い（結論）」となります。そしてこの命題の真偽を確認するために対偶を考えると、「ある地域に犯罪が少ないならばその地域には交番が少ない」となります。元の命題に違和感を感じた人も、対偶には納得できるのではないでしょうか。違和感を感じた理由は、主張が間違っているからではありません。最初の言い方では「ならば」に当たる部分が隠れてしまっているため、「交番が多い」が「仮定」であることが見え辛く、それが「原因」であるかのように聞こえてしまうのです。この場合、主張ではあくまで相関関係があることしか言っていないのですが、まるで因果関係があるかのような印象を持ってしまったのです。あやしい主張に騙されないためにも、言葉を正しく読み取る力を身につけておきたいですね。

大学の授業や数学の研究

用語の意味を決めることを「定義」といいます。真偽が定まる主張のことを「命題」といいます。議論の大前提となる、証明を必要としない命題を「公理」といいます。ある事柄が正しいことを明らかにすること (その手続き) を証明といいます。公理と定義を使って証明した命題のことを「定理」といいます。高校の範囲で「命題」を学んだ後は、おそらく大学受験までは命題のことを忘れてしまっている人がほとんどではないでしょうか。しかし進路にもよりますが、大学で数学の授業を受けることになる人は大学の数学で「定義・命題・公理・定理・証明」という言葉が何度もなんども出てくることに驚くのではないかと思います。そして実際には、大学の数学の授業以外にも数学の研究等において「命題」や「対偶」の考え方が用いられる場面はたくさんあるのです。ここからは対偶を用いた数学の議論の一例をご紹介したいと思います。

４．ひろがる数学

高校では数学 I, II, III, A, B(, C) という区分があり、さらにそれぞれが細かく分けられています。大学でも数学をいくつかの分野に分けますが、その分け方は高校までとは異なります。例えば大学での数学には次のような分け方があり、これは高校数学とは次のように対応しています。

・「解析学」··· 関数の極限・微分・積分、

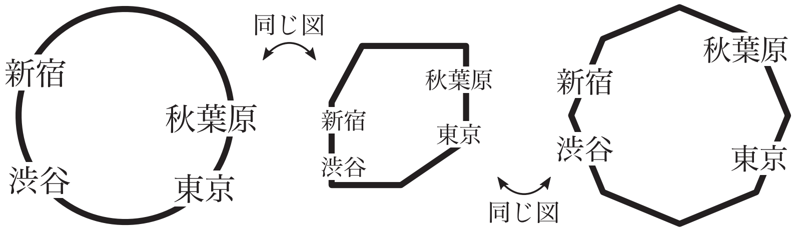
・「代数学」··· 展開・因数分解・方程式・不等式・複素数・数列、

・「幾何学」… 平面図形・空間図形・ベクトル・式と曲線

そしてこの３つの分け方は、さらにそれぞれを細かく分類することができるのです。ここではこの中の「幾何学」に注目して見ていきます。

高校の範囲との対応から想像がつくかもしれませんが、「幾何学」では図形や空間を扱います。「幾何学」とは図形や空間の性質を調べ、「同じもの」同士でそれらを分類する分野です。（例えばわたしたちはそれぞれが持つ特徴から、「円」「三角形」「四角形」などと呼び分けて図形を分類しています。）
また「幾何学」はさらにいくつかの分野に分けることができますが、その中のひとつに「位相幾何学」という分野があります。この「位相幾何学」は「形」や「大きさ」ではなく、「つながり方」が同じものを「同じ図形・空間」として分類する、少し不思議な数学を扱う分野なのです。

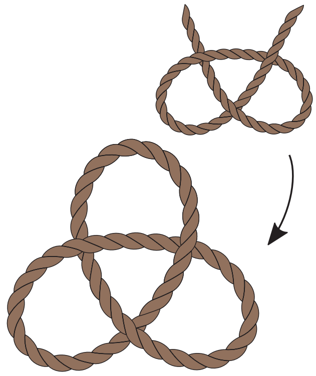
例えば次の図を見てください。これはとある地域を走っている電車の路線図を、３種類の描き方で表したものです。

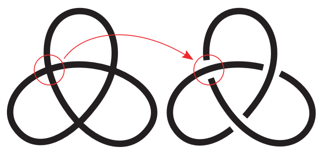


路線図を見るときは、形や大きさ、駅と駅の間の距離の割合が違うものは違う電車の路線図だ、という考え方はしません。これら３つは全て路線図としては同じものとして扱われるはずです。そこで右図を見て下さい。これは先程の３つの路線図と同じものではありません。
ここでは形や大きさ、距離などの違いで区別しているわけではありません。たとえば適当な場所から線路を時計回りにたどったときに、駅と駅がどのような順でつながっているのかによって「同じ路線図」か「違う路線図」かを区別しているのです。図形の形や大きさではなく、「つながり方」が本質であるとこの場合は考えているのです。このように「つながり方」のみに注目して図形を分類する分野が、「位相幾何学」です。

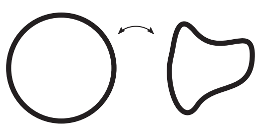
結び目理論

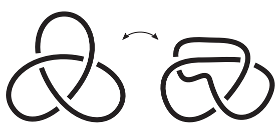
「位相幾何学」では数学の授業で扱われる図形をはじめ、様々な曲線や曲面、立体などを扱いますが、その中でも「閉じた輪っか」のみに注目する「結び目理論」と呼ばれる分野があります。先ほどは路線図として、紙、つまり平面上に描かれた輪のような図形を考えていましたが、ここからは輪ゴムのように空間の中に存在する輪っかを想像してください。「閉じる」とは、ヒモの両端をつなげてまさに輪ゴムのような輪っかの状態にすることを表しています。しかしヒモはそのまま閉じてただの輪っかにするだけではなく、右図のように結び目を作った状態で、その結び目をほどかずに両端を閉じてしまうこともできます。このようにヒモを結び、その両端をつなげて閉じたものを、数学における「結び目」と呼んでいます。また結び目自体は立体なので、これを「結び目の図」として紙の上に描くときはヒモ同士が重なっている部分の状態も分かりやすく表示する必要があります。そこでヒモのどの部分が隠れているかを、右の図のように隠れている方のヒモの一部分を消すことで表現することにします。





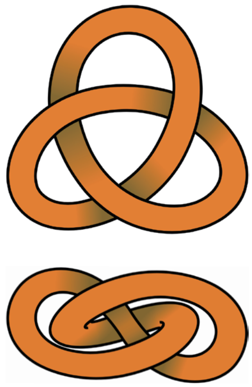
結び目理論の基本的な目標は、２つの結び目が「同じ結び目」かどうかを判断することです。ここからは「結び目」を立体図形として、「結び目の図」を平面図形として扱いますが、リボンやネクタイ、靴紐など日常の中にある結び目を考えると、結び目は形を自由に変えることができるものとして扱う方が自然です。学校の数学の授業では形が同じものを「同じ図形」と言うと思いますが、結び目理論では「同じ結び目」という言葉は次のような意味で用います。まずは、ただの輪っか（右図）を想像してみてください。素材がゴムだとすると、輪っかを手で持って曲げたり伸ばしたり縮めたりすることができますが、形が変わってもただの輪っかであることには変わりありません。他の結び目（下図）に関しても同様に、結び目を手で持って曲げたり伸ばしたり縮めたりした場合、結び目を変形する前と後では見た目の形は変わってしまいますが、結び目としては同じも





のです。結び目理論では扱う結び目の見た目の形や大きさではなく、ヒモの絡まり方が同じもの同士を「同じ結び目」として扱うのです。

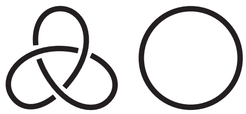
　また結び目自体は立体なので、曲げたり伸縮させたりといった変形を加えない場合でも、どの方向から結び目を見るかによって見た目の形が変わります。例えば右の２つの結び目の図は図としては全く違う形をしていますが、実はこれらは同じ結び目を表す図なのです。上側の図をある結び目を正面から見た図だとすると、下側の図はそれを下から見た図になっているのです。結び目がどのような形をしているか、もしくはどのような図で描かれるかによって見た目の形が全く異なるものになってしまうので、２つの結び目が「同じ結び目」かどうかを判断するという単純そうな目標は、実は非常に難しいことなのです。



では「結び目の図」として並んだ２つの図が同じ結び目を表しているということや違う結び目を表しているということは、どのように示せばよいのでしょうか。

問１．右の２つの結び目の図が、同じ結び目を表していることを示すにはどうすれば良いでしょうか。

問２．右の２つの結び目の図が、違う結び目を表していることを示すにはどうすれば良いでしょうか。



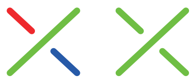
　まず問１ですが、上で述べたような「下から見たらこう見えるよ」と言うだけではそれが本当かどうかわかりません。２つが同じ結び目を表す図であることを示すためには、一方の図の通りの形の結び目を実際に手で持ち、結び目の形を変えていってもう一方の結び目の図と同じ形にできる、ということを示す必要があります。手元にひもやゴムでできた結び目があればこのように変形の様子を観察して示すことができますが、手元に結び目がない場合は、結び目の図を用いて示すことになります。その方法は式変形の過程のように、変形途中の結び目の図をいくつか並べていき、結び目の変形の過程を示すというものです。この章の最後に問１の解答例を掲載しておきますので、興味のある方は一度考えてみてください。

　では次に、問２のように、２つが違う結び目を表す図であることを示したい場合はどうすれば良いのでしょうか？この２つはどれだけ変形しても同じ形になってはくれません。見た目にも、この２つの図は明らかに違う結び目を表しているように感じますが、現状ではただ「同じ結び目の図であることを示そうとどれだけ頑張ってもできないから、たぶん違う結び目の図だよ。」と言っている状態です。数学では、これは理由にはならないのです。

結び目不変量

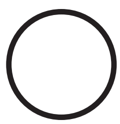
　結び目理論では２つが違う結び目であることを判断するための指標として、「結び目不変量」と呼ばれるものが用いられます。これは同じ結び目には同じ指標が割り当てられるようにした量やもののことで、様々な種類の結び目不変量が存在します。今回は結び目不変量の一つである、「３彩色可能性」を紹介します。３彩色可能性を考えるためにはどこかに色を塗る必要があるのですが、立体である結び目のヒモに直接色を塗るのではなく「結び目の図」に色を塗ります。結び目自体は閉じた１本のヒモですが「結び目の図」はヒモの重なりの部分をヒモの一部分を消すことで表現しているため、複数の曲線で描かれた図になっています。そこで、次の２条件をみたすように結び目の図の各曲線を塗り分けることを考えます。

- 結び目の図の各交点で出会う３つの辺の色は全て同じ色かまたは全て異なる色になるように塗る。
- ひとつの結び目に対して少なくとも２色は使う。



このような塗り分けができるとき、その結び目は３彩色可能であるといいます。では実際に、先程から見ている結び目の図「」に色を塗ってみましょう。

　これは右図のように条件を満たす形で各曲線を塗り分けることができるので、結び目「」は３彩色可能であるといえます。しかしただの輪っかである「」は、「少なくとも２色は使う」という条件を満たすように塗り分けることができません。したがって、結び目「」は３彩色不可能ということになります。



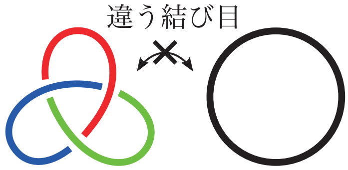
そしてこの３彩色可能性に関して、次の命題が成り立つ事が知られています。

命題：	２つが同じ結び目	⇒	２つとも３彩色可能 または ２つとも３彩色不可能

「２つとも３彩色可能」または「２つとも３彩色不可能」というように、２つの同じ結び目に対して「同じ指標」を割り当てているので、これは結び目不変量になっています。しかし命題の解説でも述べたように、たとえ命題が真であってもその逆が真であるとは限りません。この命題は「２つが同じ結び目ならば、２つとも同じ指標が割り当てられる」と言っているだけで、「同じ指標が割り当てられたからといって、２つが同じ結び目とは限らない」のです。なんだ全然使えないじゃないか、と思うかもしれません。しかし、命題とその対偶の真偽についての大切な性質「命題とその対偶の真偽は一致する」を思い出してください。上の命題に対して、その対偶は次のように書くことができます。

対偶：	２つのうち一方は３彩色可能 かつ もう一方は３彩色不可能	⇒	２つは違う結び目

元の命題が成り立つことがわかっているので、この対偶も成り立ちます。そしてこの対偶から、２つの結び目のどちらか一方が３彩色可能で、もう一方が３彩色不可能であるという事実が確認できれば、それが２つの結び目が違う結び目である証拠になるのです。右下の２つの結び目は先程確かめたように「」は３彩色可能でしたが、「」は３彩色不可能でした。この事実を命題の対偶の性質と照らし合わせることで、この２つの結び目は違う結び目であることが分かり、問２が解決します。

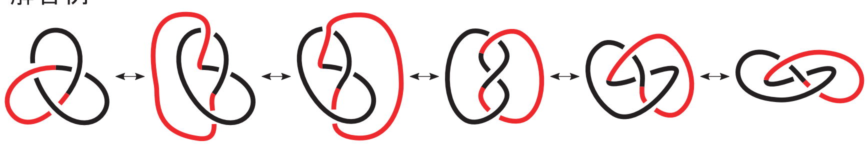


５．数学のおもしろさ

第３章の終わりでも触れましたが、学校や塾で数学を学んでいるとどうしても学校のテストや高校・大学の入試があり、公式の暗記や計算練習などのような点を取るための訓練に時間を取られます。そのため『数学ができること』を、「テストで点が取れること」「答えを求めることができること」「たくさん公式を覚えていること」「計算が早いこと」などと混同してしまいがちです。しかし本来、数学は得点や計算能力を競い合う学問ではなく、考える学問です。実際ここまで見てきた話も立派な数学の話題ですが、計算は全く出てきませんでしたね。学校の数学では、暗記と計算練習を重ねることである程度良い成績を取れる人はたくさんいます。しかし公式・解法の暗記や計算練習が数学の勉強方法の全てになってしまったら、それ以上成績を伸ばすのは難しくなってしまいます。さらに、難易度の高い問題や見たこともない問題に出会ったときは手も足も出ないでしょう。そして何より、これでは数学を学ぶ理由も数学の面白さも全くわかりません。数学の本当の面白さは「解ける」ことではなく「分かる」ことです。公式・解法を覚えて正しい解答を書けるようになった問題でも、「なぜこの問題にはこの解法を使うのか？」「なぜこんな公式が必要なのか？」といった疑問を持ったことはありませんか？そしてそのまま解決されることのなかった疑問が、きっとたくさん残っているのではないでしょうか。とはいってもこのような疑問は授業が進むにつれて覚えなければならないことが増えてしまい、疑問を感じたこと自体忘れていってしまうものです。もちろん全ての疑問の解決に毎回時間を費やしていたらテスト勉強が進まないので、全てを解決する必要はないと思います。しかしこのような疑問について考える時間や解決のために試行錯誤する経験、そして疑問が解決した時の感動の中に、数学を学ぶ理由やの本当の魅力が隠れているのではないでしょうか。

数学は言葉で書かれているということ、数学は考える学問であるということ、そして、それこそが数学の本当の面白さであるということを少しでも感じてもらえれば嬉しいです。

問１．解答例



索引

【や】

【ら】

【わ】

ひろがる数学の世界　編集グループ
雨宮　敏子　　お茶の水女子大学理系女性教育開発共同機構
加々美勝久　　お茶の水女子大学理系女性教育開発共同機構
船越　　紫　　奈良女子大学理系女性教育開発共同機構
八ヶ代美佳　　奈良女子大学理系女性教育開発共同機構

ひろがる数学の世界

発行日：　2019 年 3 月 31 日

発行者：　お茶の水女子大学理系女性教育開発共同機構
〒 112-8610　東京都文京区大塚２丁目１番１号
電話　03（5978）5825
FAX　03（5978）2650
ocha-cos-office@cc.ocha.ac.jp

奈良女子大学理系女性教育開発共同機構
〒 630-8506　奈良県奈良市北魚屋東町
電話　0742（20）3266
coreofstem@cc.nara-wu.ac.jp

印刷所：　株式会社甲文堂　東京都文京区大塚 1-4-15-105
電話　03-3947-0844